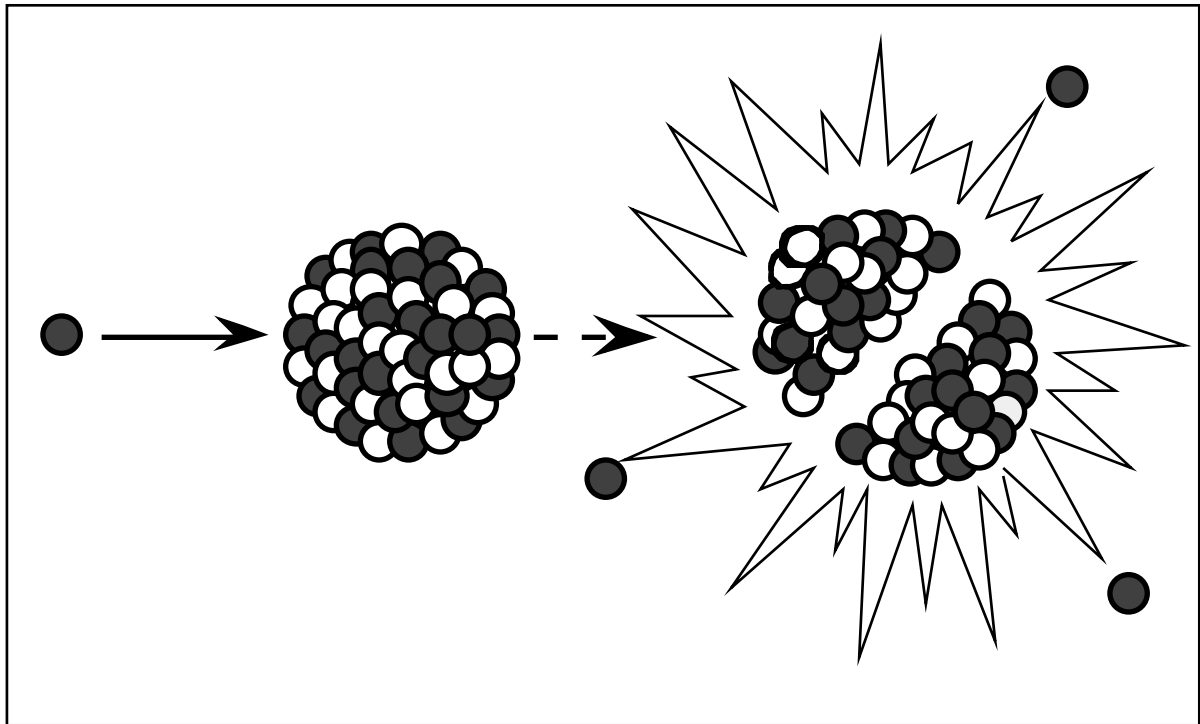


Parte II°

Impianti a
energia
nucleare



PARTE II° – IMPIANTI A ENERGIA NUCLEARE.

CAP.II°.1 – RICHIAMI DI FISICA E INGEGNERIA NUCLEARE.

§ II°.1.1 – FORZE ED ENERGIA NUCLEARE. COSTITUZIONE DEL NUCLEO ATOMICO.

La conoscenza delle forze e dell'energia gravitazionale ha permesso la comprensione dei legami tra i corpi celesti fra i quali essa è preponderante e quindi dell'interazione fra gli aggregati cosmici, nonché la valutazione delle possibilità di conversione di detta energia in forme utilizzabili sulla terra, così come la conoscenza delle forze e dell'energia elettromagnetica classica e quantistica, ha permesso lo studio dei legami, e quindi della costituzione, molecolare e atomica relativa a elementi e composti fra i quali essa è preponderante, nonché la valutazione delle possibilità e dell'entità di utile conversione di detta energia potenziale di tipo chimico.

La natura e il comportamento degli immensi ammassi stellari e dei microscopici nuclei atomici, la loro costituzione e le reazioni che vi avvengono, dipendono dalle caratteristiche dell'interazione forte, (nucleare), così come le possibilità di pratico utilizzo di questa forma di energia potenziale.

Il nucleo atomico è composto di particelle cariche positivamente, i protoni, e neutre, i neutroni, di carica elettrica e massa note, (quando non è necessario tenere conto della carica elettrica, i costituenti del nucleo, protoni e neutroni, vengono indicati come nucleoni).

Misurate la carica e la massa dei nuclei si ha:

Z = numero di protoni = carica nucleare/carica del protone

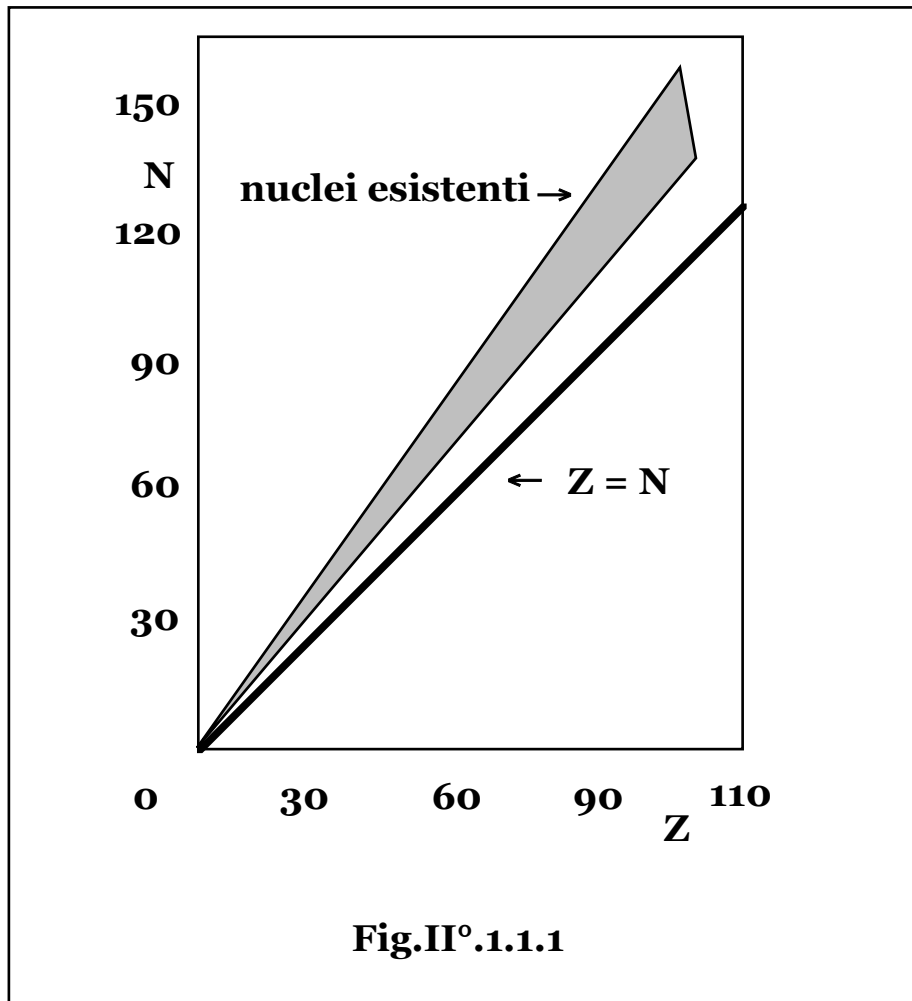
A = numero di protoni+neutroni \approx massa nucleare/massa protone

N = numero di neutroni = $A - Z$

Il numero di protoni nucleari, ($1 \leq Z \leq 92$), è ciò che distingue tutti gli elementi chimici. Nuclei con lo stesso **Z** e diverso **N** corrispondono allo stesso elemento chimico e sono detti isotopi, con caratteristiche nucleari che, a differenza di quelle chimiche, (identiche), possono essere molto diverse.

In **Fig.II°.1.1.1** è riportata l'abbondanza relativa dei protoni e neutroni nei nuclei esistenti.

L'unità di massa in fisica nucleare, (unità di massa atomica: **a.m.u.**), è definita come **1/12** della massa dell'isotopo 12, (6 protoni e 6 neutroni), del nucleo di carbonio e risulta: **$1 \text{ amu} = 1,6604 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$** .



I nuclei atomici non possono essere pensati semplicemente come l'accostamento di **Z** protoni e **N** neutroni.

Infatti detta **M** la massa del nucleo e **m_p**, **m_n**, le masse del protone e del neutrone, risulta sperimentalmente: **M < Z m_p + N m_n**.

La differenza fra le due grandezze: **DM = (Zm_p + Nm_n) - M**, è detta "difetto di massa".

Secondo le leggi dell'elettromagnetismo i nuclei atomici non potrebbero esistere in quanto cariche dello stesso segno, (i protoni), si respingono e i neutroni, privi di carica, non interagiscono.

L'esistenza dei nuclei atomici è dovuta alle forze attrattive nucleari che agiscono sui nucleoni indipendentemente dalla loro carica elettrica, (postulate inizialmente proprio per risolvere il paradosso), e in grado di superare le forze repulsive elettromagnetiche.

Le forze nucleari creano dunque un campo e quindi una energia di legame del nucleo, (**E_b**), che sperimentalmente risulta:

$$E_b = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{1/3} - a_4 (N - Z)^2 A^{-1} + a_5 A^{3/4},$$

con: **a₁ = 15,76; a₂ = 17,81; a₃ = 0,711; a₄ = 23,702;**

	Z	N
a₅ = 34	pari	pari
a₅ = 0	pari	dispari
a₅ = 0	dispari	pari
a₅ = - 34	dispari	dispari,

ove il primo termine, che rappresenta l'energia di legame nucleare vera e propria, è diminuito, nell'ordine, dall'effetto superficiale di estremità, dalla repulsione coulombiana, dall'energia cinetica dei nucleoni e dall'effetto dell'interazione del momento della quantità di moto dei singoli nucleoni.

Pertanto il legame di particelle libere che si uniscono a comporre un nucleo atomico, comporta la creazione di un'energia di legame **E_b**, cui deve corrispondere secondo la correlazione relativistica, (**E = mc²**), un annichilimento, (o difetto), di massa, (**DM**), pari a:

$$DM \ c^2 = [(Zm_p + Nm_n) - M] \ c^2 = E_b.$$

In **Fig.II°.1.1.2** è riportato l'andamento dell'energia media di legame per nucleone: **B = E_b/A = (1/A)[(Zm_p + Nm_n) - M] c²**, in funzione del numero di massa **A**.

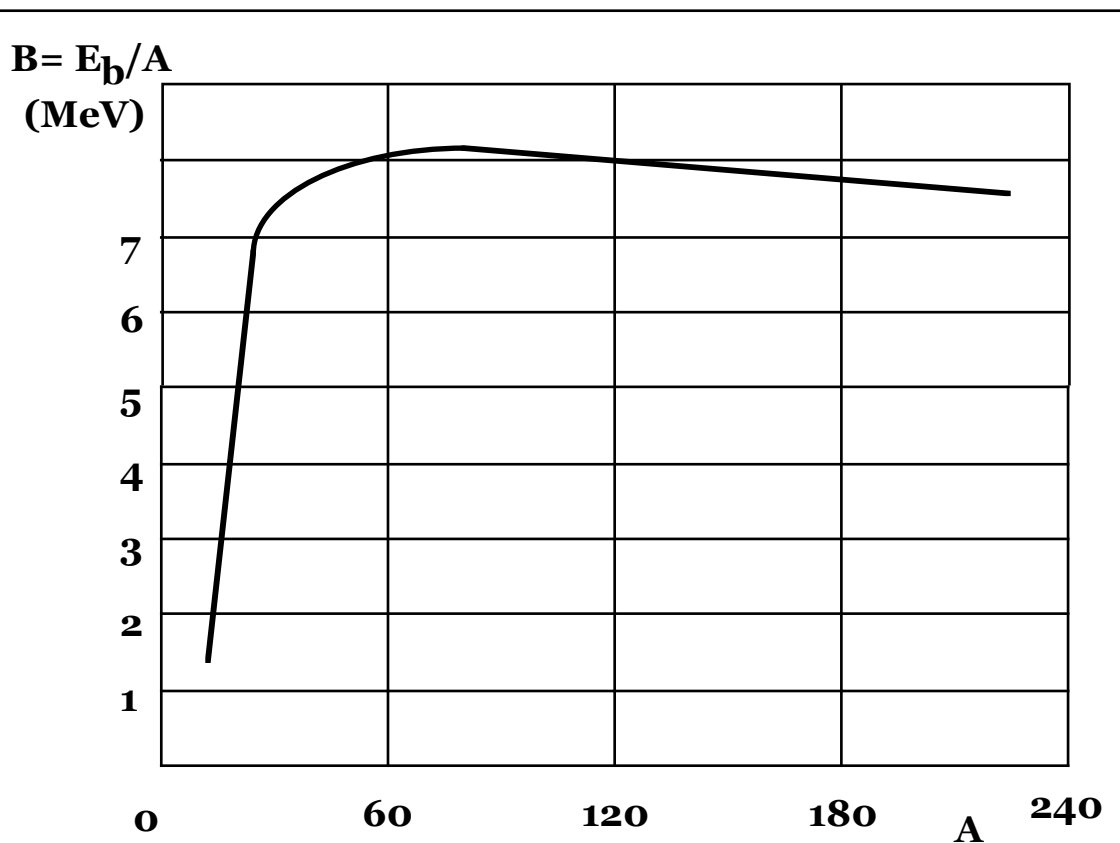


Fig.II°.1.1.2

Detta energia risulta quella necessaria per estrarre un nucleone dal nucleo o quella che libera un nucleone entrando nel campo di forze del nucleo stesso.

L'unità di misura dell'energia, impiegata per i fenomeni nucleari è l'elettronvolt, (**eV**), l'energia di una carica elettrica pari a quella dell'elettrone, o del protone, ($\pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$), in un campo elettrico unitario, (**1 V**), e relativi multipli: **keV** = 10^3 eV , **MeV** = 10^6 eV , **GeV** = 10^9 eV , con: **1 eV** = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Poichè risulta: **B** ~ $7 \div 9 \text{ MeV/nucleone}$, risulta un difetto di massa per nucleone pari a: **DM** = $B/c^2 = 1,24 \div 1,6 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, ovvero ogni nucleone tramuta in energia di legame la frazione:

$$(DM/m_p) = (B/m_p c^2) = 7,41 \div 9,53 \cdot 10^{-3},$$

della propria massa e viceversa il numero di nucleoni necessari a costituire un nucleo di massa **A**, vale:

$$A + A \frac{B}{m_p c^2} = A \left(1 + \frac{B}{m_p c^2} \right) = 1,00741 \div 1,00953 A$$

In base alla correlazione fra massa ed energia, ($E = mc^2$), la massa delle particelle fondamentali, viene spesso misurata in **GeV/c²**, riferimento assai prossimo all'unità in **amu**, essendo:

$$\frac{\text{GeV}}{c^2} = \frac{10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,07 \text{ amu}.$$

In **Tab.II°.1.1.I°**, sono riportate le caratteristiche fisiche delle particelle atomiche e nucleari, le cui dimensioni non risultano, tuttavia, relative a nette superficie di discontinuità, ma come le distanze alle quali le caratteristiche di densità e carica si riducono alla metà dei valori al centro.

La stabilità dei nuclei in funzione della geometria del sistema, al variare del numero di massa, dipende dalla relazione: **E_b** = **E_b(A, Z)**.

L'analisi geometrica di tale relazione, mostra un minimo del valore assoluto dell'energia di legame per forma sferica, (ovvero forma sferica stabile), per: **Z²/A** ≤ **46,6**, da cui essendo il rapporto **Z/N** ~ **0,7**, per nuclei pesanti: **Z** ≤ **112**; **A** ≤ **270**.

I nuclei tendono cioè, a una crescente instabilità al crescere della loro massa, (in natura il più pesante nucleo stabile, ovvero non tendente alla spontanea emissione di radiazioni, è il bismuto: **Z** = **83**, **A** = **209**), e il nucleo limite ipotetico, (**Z** = **112**, **A** = **270**), rappresenta un limite invalicabile per l'esistenza di successivi elementi stabili, oltre il quale la

costituzione del nucleo corrisponderebbe a un equilibrio instabile e il nucleo tenderebbe a fissionarsi spontaneamente.

In realtà oltre alla legge generale relativa alle dimensioni, la stabilità dei nuclei dipende anche dalla loro struttura e composizione.

Gli atomi che presentano una composizione completa dei gusci elettronici esterni, non tendono a acquisire o cedere ulteriori elettroni legandosi con atomi della stessa o diversa natura a formare molecole, risultando gas monoatomici e per questo sono detti nobili.

Per la descrizione dei nuclei atomici non esiste un modello esaustivo, ma diversi schemi ognuno in grado di rendere conto di alcune caratteristiche dei nuclei stessi, (modello a gas di nucleoni, modello a goccia, modello a orbite).

Descrivendo il nucleo atomico come composto da nucleoni disposti in successivi orbitali o gusci a diversi livelli energetici, (analogamente agli elettroni nel modello dell'atomo), risulta un numero massimo di nucleoni contenibili in ogni livello, dettato dalle leggi della fisica quantistica e in caso di strati completi si ottengono particolari composizioni che rendono i relativi nuclei più stabili in quanto non tendenti ad acquisire o cedere particelle o radiazioni, ovvero a non subire reazioni nucleari.

Tali nuclei sono detti **magici**: oltre al deuterio, ($Z = 1$, $N = 1$), le configurazioni magiche risultano quelle in cui il numero di protoni, (Z), o neutroni, (N), risulta pari a: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Artificialmente dal 1937, data di scoperta, (Emilio Segrè), del primo elemento chimico artificiale, il tecnezio, ($Z = 52$), oltre all'altro elemento leggero, il prometeo, ($Z = 61$), sono stati creati venti nuovi nuclei transuranici, (generalmente con più isotopi), di crescente instabilità: Nettunio, (**$Z = 93$**), Plutonio, (**$Z = 94$**), Americio, (**$Z = 95$**), Curio, (**$Z = 96$**), Berkelio, (**$Z = 97$**), Californio, (**$Z = 98$**), Einstenio, (**$Z = 99$**), Fermio, (**$Z = 100$**), Mendelevio, (**$Z = 101$**), Nobelio, (**$Z = 102$**), Laurenzio, (**$Z = 103$**), Rutherfordio, (**$Z = 104$**), Dubnio, (**$Z = 105$**), Seaborgio, (**$Z = 106$**), Bohrio, (**$Z = 107$**), Hassio, (**$Z = 108$**), Meitnerio, (**$Z = 109$**), Unnunnilium, (**$Z = 110$**), di peso atomico **272**, il primo di massa al di sopra del limite di stabilità, Unnunium, (**$Z = 111$**), e infine Ununbium, (**$Z = 112$**), di peso atomico **277**, (per le dispute scientifico-politiche dei ricercatori, gli ultimi tre nuclei hanno ancora un nome provvisorio composto convenzionalmente dal numero atomico completato da una desinenza).

I nuclei artificiali vengono ottenuti bombardando con un raggio di ioni pesanti, (cromo, zinco), un disco rotante di elementi stabili, (bismuto, piombo).

Oltre il Dubnio le vite medie risultano al di sotto del secondo giungendo a meno di un millisecondo per gli elementi più pesanti, (la creazione di un solo nucleo $Z = 112$, vissuto $0,3 \cdot 10^{-3}$ s, prima di decadere nel nucleo $Z = 110$, poi nel fermio e quindi scomparire, ha richiesto $5 \cdot 10^{18}$ bombardamenti di ioni zinco lanciati alla velocità di 30.000 km/s, su un bersaglio di piombo).

Tuttavia procedendo verso dimensioni crescenti la naturale tendenza all'instabilità ovvero all'abbassamento della vita media dei nuclei, subisce un'interruzione in prossimità di nuclei magici, ovvero superato un "mare di instabilità" si giunge a "un'isola di stabilità" e infatti gli ultimi nuclei ottenuti mostrano tempi di dimezzamento relativamente maggiori: **$Z = 113$** , 1,2 s, **$Z = 114$** , nucleo magico contenendo 184 neutroni, probabilmente simile a un metallo di colore argenteo, molto più stabile dei suoi predecessori con 30 s, **$Z = 115$** , 90 ms e **$Z = 116$** , alcune decine di millisecondi.

Supponendo di scindere un nucleo in due parti, (o di fondere due nuclei in uno), in **Fig.II°.1.1.3** è indicato l'andamento dell'energia potenziale di legame: **$E_p = E_p(r, A, Z)$** , in funzione della deformazione del nucleo, ovvero della distanza dei centri dei due ipotetici frammenti di fissione, (o di fusione).

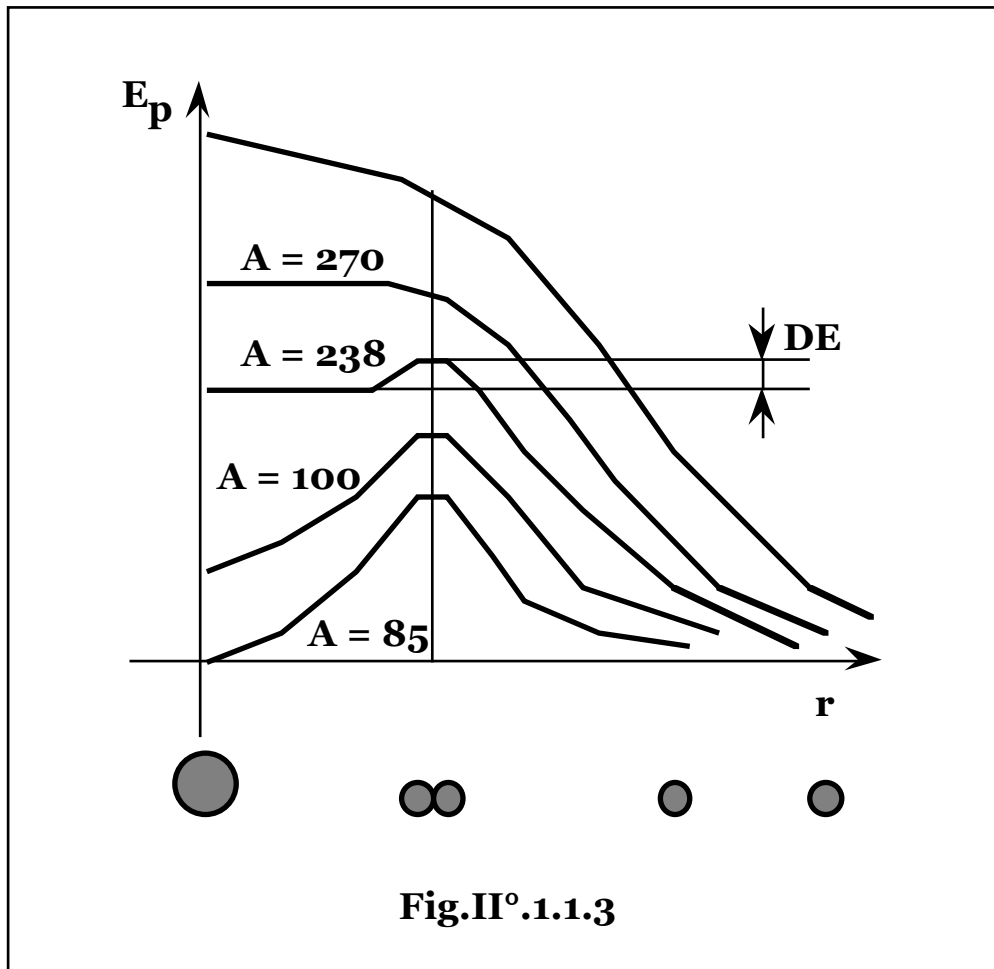
Gli andamenti complessivi che risultano per le curve dell'energia potenziale, dipendono dalla natura a corto raggio delle forze nucleari.

Oltre il limite di scissione le forze nucleari risultano trascurabili e la curva dell'energia potenziale assume la forma dell'iperbole repulsiva coulombiana, mentre entro detto limite si ha prevalenza delle forze nucleari con creazione di una buca di potenziale.

Il minimo della funzione per forma sferica risulta relativo, [ovvero l'equilibrio metastabile: **$E_p(0) > E_p(\infty)$**], per: **$Z^2/A \geq 16,3$** , (**$Z \geq 37$** , **$A \geq 85$**), e pertanto per: **$16,3 \leq Z^2/A \leq 46,6$** , (**$37 \leq Z \leq 112$** ; **$85 \leq A \leq 270$**), pur essendo il nucleo in equilibrio in forma sferica, la fissione comporta una liberazione di energia.

Poiché la soglia di perturbazione, o gradino di energia **DE**, da superare per giungere a scissione decresce all'aumentare di **A** fino ad annullarsi per **A ~ 270** e divenire negativo per **A > 270**, le dimensioni dei nuclei esistenti in natura sono limitate superiormente o, in pratica, oltre l'ultimo elemento naturale esistente, (uranio: **$Z = 92$** , **$A = 238$**), i nuclei artificiali ottenuti decadono spontaneamente.

L'ottenimento di energia utile da trasformazione di energia potenziale di tipo forte è, quindi, possibile per fissione di nuclei pesanti in frammenti più leggeri fino al limite: **$Z^2/A \sim 16,3$** , (**$Z \sim 37$** , **$A \sim 85$** , rubidio).



La **Fig.II° .1.1.2**, mostra, infatti, che l'energia di legame per nucleone dei nuclei intermedi è maggiore di quelli pesanti.

Pertanto i prodotti di fissione risultano più legati e la differenza di energia potenziale della trasformazione viene liberata appearing come energia cinetica dei frammenti ed eventuali particelle minori di fissione, o in forma di radiazione ondulatoria.

La condizione limite, nell'ipotesi di fissione simmetrica, risulta:

$$B(A/2, Z/2) = B(A, Z),$$

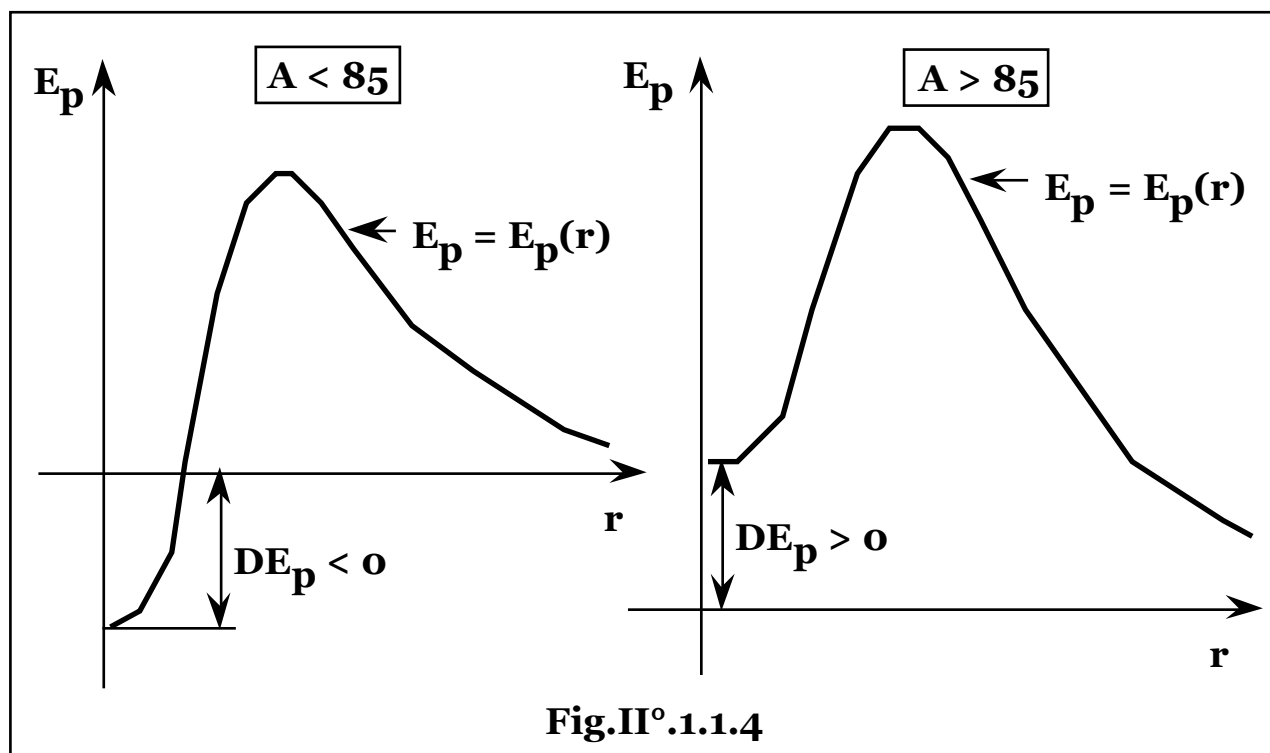
mentre il principio rimane valido anche se i frammenti di fissione non risultano uguali e sono generate anche particelle minori.

In generale la fissione di un nucleo di caratteristiche (A, Z) in due frammenti di caratteristiche (A_1, Z_1) , (A_2, Z_2) , con $A_1 + A_2 = A$, $Z_1 + Z_2 = Z$, comporta una variazione di energia potenziale DE_p pari a:

$$DE_p = A_1 B(A_1, Z_1) + A_2 B(A_2, Z_2) - (A_1 + A_2) B[(A_1 + A_2), (Z_1 + Z_2)].$$

Se risulta: $DE_p > 0$, (condizione verificata per $A > 85$), la reazione esoergica è la scissione nucleare, (fissione), di nuclei, (pesanti), mentre se risulta: $DE_p < 0$, (condizione verificata per $A < 85$), si ottiene

liberazione di energia per la reazione inversa, ovvero fusione di nuclei leggeri, (**Fig.II°.1.1.4**).



Aggiungendo particelle libere, ($E_p = 0$), protoni o neutroni, a nuclei leggeri, il nucleo composto risulta più stabile, (**Fig.I°.1.8.2**), e si ha quindi liberazione di energia, fino al limite di $B_{\max} = B(56, 26)$, che corrisponde all'elemento ferro, (la stabilità nucleare non ha evidentemente alcuna correlazione con le caratteristiche chimiche degli elementi, dovute ai legami atomici).

Oltre tale limite l'aumento di energia potenziale dovuto alla cessione dell'energia di legame della particella libera, è minore della diminuzione complessiva di energia potenziale del nucleo composto di maggiori dimensioni ed occorre, quindi, spendere energia per costituirlo.

Le reazioni nucleari utili per la produzione di energia, risultano pertanto:

- unione di nuclei leggeri (**fusione nucleare**);
- scissione di nuclei pesanti (**fissione nucleare**).

§ II°.1.2 – SEZIONI D'URTO NELLE REAZIONI NUCLEARI.

L'attitudine ad avvenire di reazioni fra particelle nucleari dipende dalle forze di interazione attrattive o repulsive, (nucleari e coulombiane), esistenti fra le particelle stesse, ovvero dalle eventuali barriere di

potenziale che le particelle devono superare per collidere e quindi dall'energia delle particelle stesse, (o che è necessario fornire loro), nonché dalla natura, dalle caratteristiche geometriche, strutturali e di stabilità dei nuclei reagenti e prodotti.

Il parametro globale atto a quantificarle è indicato come sezione d'urto e l'entità delle interazioni nucleari viene pertanto generalmente riferita in termini di sezione d'urto.

In una porzione di spazio in cui è presente una densità omogenea di particelle "bersaglio", N , (m^{-3}), aventi sezione geometrica media s , (come proiezione dell'elemento di volume associato alla particella su un piano ortogonale alla direzione del moto), ogni spessore dx di area unitaria comunque orientata data l'omogeneità della distribuzione, presenta globalmente una frazione occupata dalle particelle pari a $sNdx$ e per unità di lunghezza: sN , (m^{-1}).

Pertanto una particella "proiettile" che attraversa la regione alla velocità v , (m/s), percorrendo in un tempo infinitesimo dt uno spessore infinitesimo: $dx = vdt$, ha una probabilità di collisione pari a: $sNdx = sNvdt$ e nell'unità di tempo un numero di collisioni: sNv .

Se le particelle proiettile sono presenti con densità n , (m^{-3}), il numero di eventi di collisione per unità di volume e di tempo vale:

$$R = sNv, (m^{-3} s^{-1}).$$

Se il flusso di particelle attraversa una regione di spazio contenente particelle bersaglio, (non generanti nuove particelle), in caso di collisioni con assorbimento o deviazione dalla traiettoria, il numero di collisioni in ogni spessore dx , ($sNdx$), è pari al decremento del flusso, (m^{-2}), per unità di lunghezza, (m^{-1}): $-dn = sNdx$, (m^{-3}), e pertanto la densità di proiettili in funzione della coordinata di avanzamento risulta: $n(x) = n_0 e^{-sNx}$, con n_0 densità originaria di particelle.

In uno spessore L il numero di collisioni nell'unità di tempo e per unità di superficie normale a v , vale:

$$\int_0^L R dx = \int_0^L s n_0 N v e^{-sNx} dx = n_0 v (1 - e^{-sNL}).$$

In assenza di mutue interazioni, la sezione d'urto coincide con la sezione geometrica della particella bersaglio, tenuto conto delle dimensioni della particella proiettile.

Tuttavia, anche in presenza di interazioni, barriere di potenziale ed energie di soglia, è applicabile la medesima metodologia, svincolando la sezione d'urto dalle dimensioni geometriche delle particelle per assumerne il significato unicamente probabilistico e intendendola variabile con il tipo di particelle, il tipo di reazione e l'energia delle particelle stesse.

Per le sezioni d'urto delle particelle, (che fisicamente mantengono le dimensioni di una superficie), si assume come unità di misura il **barn**, **(b): $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$** .

Qualora nella collisione di particelle possano verificarsi diversi tipi di reazioni e/o diverse particelle prodotte, ne risulta una diversa sezione d'urto per ognuno dei possibili eventi, il cui rapporto ne quantifica la relativa probabilità.

Misurando il numero di reazioni di ogni tipo, per ogni tipo di particella proiettile e bersaglio e al variare dell'energia delle particelle stesse, è possibile calcolare tutti gli andamenti delle curve: **$s = s(E)$** , che risultano gli indici di attitudine di una certa reazione ad avvenire.

Le sezioni d'urto riferite al singolo nucleo, sono dette microscopiche.

Il numero di nuclei per unità di massa di un materiale monoatomico, è pari al numero di Avogadro, (particelle/kmole), diviso la massa, (**M**), atomica, (kg/kmole), da cui moltiplicando per la densità, (**d_s**), si ottiene

il numero di nuclei per unità di volume: $\frac{d_s N_A}{M}$, (in caso di sostanze molecolari la grandezza aumenta del fattore numero di nuclei per particella, ma dello stesso fattore aumenta la massa molare con elisione degli effetti).

Il parametro: **$S = Ns = \frac{d_s N_A}{M} s$** , pertanto, assume il significato di sezione d'urto dell'unità di volume e viene indicato come sezione d'urto macroscopica.

§ II°.1.3 - CAMMINO LIBERO MEDIO.

Lungo una coordinata **x**, le particelle che subiscono collisione nell'intervallo elementare: **x, x + dx**, risultano: **$n_0 e^{-sNx} sNdx$** .

La distanza media percorsa da una particella fra due collisioni, indicata come cammino libero medio, (**l_m**), si ottiene come media della distanza percorsa dalla particella, pesata sul numero di collisioni:

$$l_m = \frac{\int_0^{\infty} x n_0 e^{-sNx} sNdx}{\int_0^{\infty} n_0 e^{-sNx} sNdx} = \frac{1}{sN} = \frac{1}{S}, \text{ da cui: } n(x) = n_0 e^{-x/l_m}.$$

§ II°.1.4 – LA RADIOATTIVITA'.

Ogni aggregato di nucleoni, ovvero ogni nucleo atomico, presenta una vita che dalla generazione stellare, catture ed emissioni nucleari, giunge a uno stadio stabile indefinito, a meno di ulteriori collisioni.

Alcuni nuclei che compongono gli elementi chimici presenti sulla terra, non sono ancora giunti al termine della loro evoluzione e risultano quindi instabili, ovvero dotati della capacità di liberare naturalmente energia emettendo radiazioni corpuscolari od ondulatorie.

Qualitativamente tali emissioni sono dovute alla maggiore stabilità dei nuclei prodotti dopo l'emissione. Infatti, poichè la repulsione elettrostatica ha raggio d'azione infinito mentre l'interazione nucleare forte pari a circa un diametro protonico, (interazione a soglia), all'interno del nucleo atomico ogni nucleone è legato solo a quelli adiacenti, mentre i protoni subiscono la repulsione di tutti gli altri.

Per ridotte dimensioni nucleari non appaiono situazioni di instabilità, ma all'aumentare delle dimensioni, la repulsione di tutti i protoni giunge a prevalere sull'attrazione solo di quelli vicini e il nucleo diventa instabile, ovvero un radioisotopo che tende a decadere emettendo radiazione trasformandosi in altri, o addirittura fissionandosi spontaneamente, ($Z^2/A > 50$).

Il superamento di eventuali barriere di potenziale nucleare sono possibili per la natura probabilistica delle transazioni di tipo quantistico, (effetto tunnel).

I neutroni contribuiscono al legame nucleare forte senza fenomeni di repulsione e anzi, allontanando i protoni, ne riducono la repulsione elettrostatica, rendendo quindi il nucleo, complessivamente più stabile.

Per questo il rapporto N/Z è crescente con le dimensioni del nucleo.

Tuttavia al di sopra di un certo numero di nucleoni, la presenza di neutroni non è sufficiente a garantirne la stabilità, per cui gli elementi naturali più pesanti non hanno isotopi stabili, (l'elemento più pesante con almeno un isotopo stabile è il bismuto, $Z = 83$, $N = 125$).

Tali emissioni spontanee di radiazioni particellari o raggianti, sono dette radioattività dal nome dall'elemento chimico radio, ($^{226}_{88}\text{Ra}$), fra i primi elementi storicamente osservati emettere radiazioni.

Nei quasi cinque miliardi di anni di vita del nostro pianeta, tale attività di decadimento ha drasticamente ridotto la quantità di nuclei radioattivi e tuttavia buona parte del calore emesso dalla terra è ancora imputabile al decadimento radioattivo.

La scoperta della radioattività ha appena compiuto cento anni.

Il 20 gennaio 1896 il fisico francese Henri Poincaré ufficializzò all'Accademia delle Scienze di Francia la scoperta dei raggi X, comunicatagli per lettera da Wilhelm Roentgen il 28 dicembre 1895.

Nello stesso anno un altro fisico francese, Henri Becquerel, da tempo dedito allo studio della fluorescenza, iniziò la sperimentazione sull'emissione di raggi X di corpi fluorescenti, esponendo alla luce solare in grado di innescarne la fluorescenza, alcuni sali, (solfuro di calcio e uranio, bisolfato di potassio), posti su lastre fotografiche avvolte in carta nera.

Durante tali esperimenti osservò che i sali contenenti uranio impressionavano le lastre anche in assenza di luce.

Era la scoperta della radioattività.

Nella sua tesi di laurea presentata nel 1897, (di cui Pierre Curie era relatore), Marie Sklodowska, (poi divenuta Curie), esaminò sali, cristalli e minerali trovando che non solo l'uranio, ma anche altri elementi come il torio emettevano radiazioni e alcuni anni più tardi, (1903), scoprì nei minerali di uranio due nuclidi, (polonio 210 e radio 226), assai più attivi dell'uranio e con riferimento al radio coniò il termine "radioattività" a indicare il fenomeno.

La scoperta della radioattività portò enormi progressi nella comprensione della struttura dell'atomo e del nucleo, dimostrò la possibilità della trasmutazione degli elementi, portò alla evidenza degli isotopi e dopo la determinazione dell'equivalenza di massa ed energia, spiegò l'origine dell'energia delle radiazioni emesse.

Causò una vera e propria rivoluzione nel mondo della scienza le cui conseguenze, industriali, scientifiche e culturali, segnarono tutto il ventesimo secolo.

Tutto il modo di concepire la fisica venne rivisto: gli elementi persero la loro immutabilità, mentre la materia, l'elettricità, l'energia e le radiazioni cessarono di essere grandezze continue divenendo quantità discrete composte da particelle, elettroni, fotoni e quanti di energia.

La fisica classica venne sostituita da quella quantistica, fu evidenziata la natura duale dell'entità particella/radiazione con la correlazione fra la lunghezza d'onda, (λ), associata a una particella di massa m e temperatura T e viceversa, mentre la legge del decadimento radioattivo portò all'abbandono dei modelli deterministici a favore di quelli probabilistici, (l'energia esprimibile come: $E \sim kT$, per una particella e come: $E = hf = hc/\lambda = h/\lambda (E/m)^{1/2} = h/\lambda (kT/m)^{1/2}$, per una radiazione, porge, eguagliando le espressioni: $\lambda^2 \sim h^2/mkT$).

Anche il tempo perse parte del suo mistero divenendo possibile con la determinazione delle leggi del decadimento radioattivo, stabilire l'età

della terra, del sistema solare, dei fossili e addirittura delle opere d'arte del passato.

§ II°.1.5 – LA LEGGE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO.

Il decadimento radioattivo ha natura statistica, ovvero numero di emissioni proporzionale al numero dei nuclei presenti.

Detto $N(t)$, il numero di nuclei al tempo t , e indicando con c_d , (costante di decadimento), la probabilità di decadimento di un nucleo instabile nell'unità di tempo, in un tempo infinitesimo dt la probabilità vale $c_d dt$.

In presenza di N nuclei si hanno, quindi $N c_d dt$ eventi di decadimento,

ovvero: $dN(t) = - N(t) c_d dt$, da cui: $\frac{dN(t)}{dt} = -c_d N(t)$,

e quindi: $N(t) = N_0 e^{-c_d t}$, con N_0 numero di nuclei al tempo: $t = 0$.

Il numero di atomi che decade al tempo t nell'unità di tempo, $[c_d N(t)]$, è pari al numero di nuclei che hanno una vita pari al periodo t stesso.

La vita media dei nuclei radioattivi o tempo medio di esistenza, (t_m) , risulta quindi pari alla media pesata di tale periodo:

$$t_m = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t c_d N(t) dt = \frac{1}{c_d} \int_0^{\infty} \frac{t}{N_0 e^{-c_d t}} c_d e^{-c_d t} dt$$

da cui: $N(t) = N_0 e^{-c_d t} = N_0 e^{-\frac{t}{t_m}}$, e risulta quindi pari al tempo necessario affinché il numero di nuclei si riduca del numero di Nepero.

Si definisce periodo di dimezzamento, $(T_{1/2})$, il tempo necessario al decadimento della metà dei nuclei considerati, ovvero il tempo per cui

$$\text{risulta: } N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{t_m}} = \frac{1}{2} N_0,$$

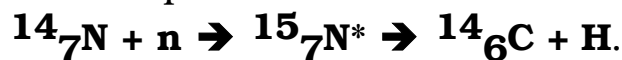
$$\text{da cui: } T_{(1/2)} = \ln 2 t_m = \ln 2 / c_d = 0,693 t_m,$$

$$\text{e quindi: } N(t) = N_0 e^{-c_d t} = N_0 e^{-\frac{t}{t_m}} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Il decadimento radioattivo è impiegato, (dal 1946), anche come metodo di datazione assoluta di materiali organici.

Il carbonio, principale costituente della materia organica vegetale e animale, (e quindi presente in ogni forma vivente della flora e della fauna), esiste in tre forme isotopiche: $^{12}_6C$, $^{13}_6C$, stabili e $^{14}_6C$ radioattivo, emettitore β .

Il **carbonio 14** si forma nell'alta atmosfera, (oltre i 15.000 m), per cattura da parte dell'azoto di neutroni, (originati dalle interazioni nucleari delle radiazioni cosmiche con le molecole atmosferiche), e successiva emissione di un protone:



Il carbonio 14 reagisce con l'ossigeno atmosferico formando anidride carbonica che tramite la fotosintesi clorofilliana entra nel ciclo biologico vegetale e successivamente in quello animale.

Poichè il carbonio 14 è radioattivo, il suo tenore in atmosfera e negli esseri viventi che scambiano materia con l'ambiente, giunge a un rapporto costante con quello stabile, ($1,33 \cdot 10^{-12}$), dato dal bilancio fra la sua produzione e assorbimento, ($R_{14} \text{ m}^{-3}\text{s}^{-1}$), e il suo decadimento con costante: $c_{d14} = 9,47 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$, ($T_{1/2} = 5.568$ anni):

$$\frac{dN(t)}{dt} = R_{14} - c_{d14}N(t), \text{ da cui: } N(t) = \left(N_c - \frac{R_{14}}{c_{d14}} \right) e^{-c_{d14}t} + \frac{R_{14}}{c_{d14}},$$

con N_c il valore iniziale e quindi con tenore di radiocarbonio di regime:

$$N_{co} = R_{14}/c_{d14}, (1,33 \cdot 10^{-12} N_o), \text{ indipendente dal valore iniziale.}$$

Alla morte di un organismo tuttavia viene a mancare il contributo della fonte ambientale, mentre quello organico si riduce asintoticamente, per cui dalla sua quantità attuale, (N_x), determinabile dall'emissione β ,

$$(\text{elettroni}), \text{ nel suo decadimento: } \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = c_d N_x, \text{ o direttamente con}$$

metodi di spettrometria di massa tramite acceleratori, è possibile risalire alla data della fine biologica essendo: $N_x = N_{co} e^{-c_d t_x}$, da cui:

$$t_x = (1/c_{d14}) \ln(N_{co}/N_x).$$

Data una sostanza contenente una massa m_c di carbonio, il contenuto di radiocarbonio 14 di regime vale:

$$N_{co} = 1,33 \cdot 10^{-12} N_o = 1,33 \cdot 10^{-12} m_c N_A / 12 = 6,675 \cdot 10^{13} m_c,$$

$$\text{da cui: } t_x = 3,3615 \cdot 10^{11} + 1,056 \cdot 10^{10} \ln m_c - 1,056 \cdot 10^{10} \ln N_x.$$

Anche altri radionuclidi vengono impiegati per misure di datazione.

Per lo studio della genesi e della dinamica di falde e bacini idrici sotterranei non può impiegarsi radiocarbonio che per la brevità della sua vita media non permette datazioni di oltre $40 \div 50$ mila anni, o trizio che non supera il secolo, ma altri radionuclidi cosmogenetici come il **cloro 36**, (vita media 300.000 anni), e lo **iodio 129**, (vita media 15 milioni di anni).

Il **cloro 36** si forma nell'alta atmosfera per bombardamento neutronico, (**n, p**), dell'argon con conseguente frazione isotopica di cloro radiattivo a

regime dell'ordine di 10^{-15} , poco variabile con l'intensità della radiazione cosmica con la latitudine e con la distanza da mari e oceani che per evaporazione immettono in atmosfera cloro stabile contenuto nell'acqua salata.

Tale rapporto isotopico del cloro, che come alogeno forma composti solubili, si ritrova nelle acque di superficie, mentre il decadimento del cloro radiattivo lo diminuisce progressivamente in acque di profondità isolate dalle precipitazioni, (a meno di contaminazioni da formazioni saline incontrate nel sottosuolo o da rocce uranifere e il conseguente flusso neutronico), permettendo stime idrogeologiche, (tempo di infiltrazione profonda, velocità di ricambio e ricarica, permeabilità degli strati rocciosi, ecc.), in funzione del divario fra i valori presenti nelle acque superficiali di ricarica e quelle profonde.

L'analogia reazione, (**n**, **p**), nell'alta atmosfera sullo xeno, porta alla formazione di **iodio 129** con frazione isotopica di regime dell'ordine di 10^{-12} , che permette stime ancora più remote, (oltre i 3 milioni di anni), a meno di contaminazioni ancora con rocce uranifere essendo lo iodio 129 un prodotto di fissione, o per sedimentazione selettiva dello iodio insieme ai resti di microrganismi che avendolo assorbito vengono distrutti dalla sua frazione radioattiva.

§ II°.1.6 – UNITA' DI MISURA DELLA RADIOATTIVITA'.

Un nucleo che per emissione radioattiva si tramuta, diviene, in generale, un nuovo nucleo radioattivo e così via fino al raggiungimento di un nucleo stabile.

Gli elementi radioattivi pesanti possono raggrupparsi in tre serie con capostipiti: **$^{238}_{92}\text{U}$** : famiglia dell'uranio;

$^{235}_{92}\text{U}$: famiglia dell'attinio;

$^{232}_{90}\text{Th}$: famiglia del torio.

L'uranio 238 con 14 successivi decadimenti giunge al termine della catena, (piombo 206), emettendo globalmente circa il 30% dell'energia rilasciata nella sua fissione.

L'elemento radioattivo più leggero in queste catene, risulta il bismuto, (**Z = 83**), mentre esistono in natura elementi radioattivi a tutti i livelli.

Le radiazioni emesse risultano:

- radiazioni alfa, (α): nuclei di elio, (**Z = 2, A = 4**);
- radiazioni beta, (β^\pm): elettroni o positroni.
- radiazioni gamma, (γ): onde elettromagnetiche di energia: **$E_f = hf$** , (**h** costante di Planck, **f** frequenza).

L'emissione nucleare di un elettrone, (non presente nei nuclei), deriva dalla reazione simbolica di creazione/decadimento del neutrone, (carica neutra), che in tal caso si comporta come insieme di una carica elettrica positiva, (protone), e una negativa, (elettrone), con effetto globale di emissione β^- e mutazione di un neutrone in protone per cessione della sua carica negativa, (elettrone):

neutrone \rightarrow protone + elettrone + neutrino,

(nelle reazioni vengono emessi anche neutrini, per la conservazione dell'energia).

Parimenti l'emissione nucleare di un positrone, deriva dal comportamento del protone come insieme di una carica elettrica neutra, (neutrone), e una positiva, (positrone), con effetto globale di emissione β^+ e mutazione di un protone in neutrone per cessione della sua carica positiva, (positrone):

protone \rightarrow neutrone + positrone + neutrino.

E' possibile anche la reazione inversa, ovvero l'assorbimento β , o cattura elettronica, da parte del nucleo di uno dei suoi elettroni atomici, con l'emissione di un neutrino monoenergetico:

protone + elettrone \rightarrow neutrone + neutrino.

Qualunque reazione, (scissione, fusione) fra particelle, comporta scambi energetici e avviene solo in presenza di interazioni fra le particelle stesse.

L'emissione o fusione di particelle composte da quark, (protoni, neutroni), è spiegabile in termini di interazione nucleare forte, mentre l'emissione o cattura β che interviene fra adroni e leptoni, (insensibili all'interazione nucleare forte), è spiegabile in termini di interazione nucleare debole, postulata inizialmente proprio per spiegare tali reazioni.

Pertanto, noto il nucleo di partenza e il tipo di emissione, è immediato determinare il nucleo prodotto, essendo:

$$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X \rightarrow \begin{matrix} A-4 \\ Z-2 \end{matrix} X + \alpha; \quad \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z+1 \end{matrix} X + \beta; \quad \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X^* \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X + \gamma,$$

avendo indicato con l'asterisco lo stato di eccitazione del nucleo.

Esistono anche eventi radioattivi, assai rari, come il "doppio β ", decadimento di due neutroni in due protoni con emissione di due elettroni, osservato nell'uranio 238 che invece di trasformarsi in torio 234 con un decadimento α , si trasforma in plutonio 238 con un doppio β e il decadimento "esotico", ovvero emissione da parte di tipici emettitori α , (radio 222, 223 e 224), di particelle più pesanti: nuclei di carbonio, ossigeno, neon.

Data una sostanza radioattiva, capostipite di una catena di decadimento, ($N_1, N_2, \dots N_i, \dots N_n$), supposta la frazione che decade sufficientemente piccola rispetto al totale, ovvero che la quantità di sostanza originaria sia molto maggiore di quelle dei prodotti, da poter considerare la sorgente di decadimento costante, all'equilibrio per ogni elemento radioattivo della catena si ha:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = c_{d_{i-1}} N_{i-1} - c_{d_i} N_i = 0, \text{ ovvero: } c_{d_i} N_i = c_{d_1} N_1 = \text{costante,}$$

($i = 1, 2, \dots, n$), che risulta la condizione di equilibrio del capostipite con i suoi prodotti di decadimento e che mostra come, in una catena di decadimento, la quantità dei diversi elementi radioattivi sia inversamente proporzionale alla loro costante di decadimento, o attività. A meno di elementi radioattivi semplici, ogni elemento radioattivo non è quindi disponibile se non in miscela con i suoi progenitori e prodotti di decadimento e conseguentemente la radioattività di una sostanza comprende necessariamente le emissioni di tutti i nuclei radioattivi presenti nella catena di decadimento cui la sostanza appartiene.

Pertanto fu assunta come unità di misura della radioattività, intesa come numero di disintegrazioni nucleari nell'unità di tempo e indicata come Curie, (**Ci**), l'attività di **1 gr** di radio 226 in equilibrio con i suoi prodotti di decadimento e risulta: **1 Ci = 3,7 10¹⁰ disintegrazioni/s**, (dal punto di vista energetico per elementi radioattivi naturali, risulta una liberazione di $0,95 \cdot 10^{-4}$ W/kg per l'uranio, $0,27 \cdot 10^{-4}$ W/kg per il torio fino a contributi di $3 \cdot 10^{-9}$ W/kg per elementi leggeri come il potassio).

Per la determinazione degli effetti delle radiazioni sulla materia, (organica o inorganica), sono definite unità di misura relative alla interazione delle radiazioni con la materia stessa, comprendendo anche tipi di radiazioni artificiali, (raggi X, neutroni, protoni, deutoni, ecc.).

§II°.1.7 – UNITA' DI MISURA DELLA RADIAZIONE ONDULATORIA.

Fu definita Roentgen, (**R**), la radiazione, (ondulatoria), **X** o γ che in **1 cm³** di aria secca STP libera l'unità di carica elettrostatica, (**3,3 10⁻¹⁰ C**), che, tenuto conto della densità e del potenziale di ionizzazione medio dell'aria, corrisponde alla cessione di **83,8 erg/gr** di aria.

Definito dal punto di vista chimico il "tessuto umano equivalente", si ha che la stessa radiazione di **1 R** libera **93,3 erg/gr** di tessuto umano.

§ II°.1.8 – UNITA' DI MISURA DELLE RADIAZIONI.

Per estendere la definizione a qualunque tipo di radiazione, fu definito il **REP**, (**R**oentgen **E**quivalent **P**hysical), come la radiazione di qualunque tipo che cede **93,3 erg/gr** di tessuto umano.

§ II°.1.9 – UNITA' DI MISURA DELL'IRRAGGIAMENTO.

Per comprendere ogni tipo di bersaglio, fu definito il **RAD**, come la radiazione di qualunque tipo che libera **100 erg/gr** di qualunque tipo di bersaglio.

Pertanto una radiazione di intensità univocamente definita in **R** o **REP**, ha una intensità in **RAD** variabile col bersaglio considerato, in quanto colpendo diversi bersagli cede loro quantità diverse di energia, mentre diversi bersagli che hanno ricevuto una definita dose in **RAD**, devono essere stati colpiti da radiazioni di diversa intensità in **R** o **REP**.

§ II°.1.10 – UNITA' DI MISURA DEL DANNO BIOLOGICO.

Le valutazioni quantitative basate sulla liberazione di energia di una radiazione su un bersaglio, trovano giustificazione nella constatazione che l'effetto delle radiazioni è proporzionale all'energia dissipata dalle radiazioni stesse nella materia, (dose assorbita).

Tuttavia, poichè il tipo di radiazione e la sua energia risultano pure influenti sull'effetto globale, (radiotossicità), specie in campo biologico, fu definita come unità di misura del danno biologico reale, (dose equivalente), il **REM**, (**R**oentgen **E**quivalent **M**an) = **RAD** x **RBE**, con **RBE**, (**R**elative **B**iological **E**fficiency), coefficiente biologico di pericolosità inteso come rapporto fra la dose equivalente o effettiva e la dose assorbita in termini energetici e valutato sperimentalmente per ogni tipo di radiazione ed energia.

Insieme a tali coefficienti furono, infine, tabulati i valori ammessi di esposizione, ovvero le dosi massime ammissibili indicate dall'**ICRP**, (**C**ommissione **I**nternazionale per la **P**rotezione dalle **R**adiazioni), espressi in genere in **REM/anno**, (o sottomultipli), e variabili per le diverse classi di popolazione e a seconda del tipo di organi in oggetto.

Attualmente nel **SI** l'unità di misura della radioattività, (**1 emissione/s**) è il Becquerel, (**Bq**), con:

$$1 \text{ Bq} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ Ci}; \quad 1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

L'intensità di radiazione è espressa in **C/kg** con:

$$1 \text{ C/kg} = 3876 \text{ R}; \quad 1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}.$$

L'unità di dose, espressa in **J/kg**, è il Gray, (**Gy**), con:

$$1 \text{ Gy} = 10^2 \text{ RAD}; \quad 1 \text{ RAD} = 10^{-2} \text{ Gy},$$

fermi restando i coefficienti **RBE**, adimensionali.

L'unità di misura del danno biologico, **Gy x RBE**, è il Sievert, (**Sv**), con:

$$1 \text{ Sv} = 10^2 \text{ REM}; \quad 1 \text{ REM} = 10^{-2} \text{ Sv}.$$

Infine, secondo i più recenti aggiornamenti dei parametri di radioprotezione, per il calcolo della dose equivalente in funzione della dose assorbita, i valori dei coefficienti **RBE**, sono stati sostituiti da fattori di correzione, (**w_R**), ottenuti sperimentalmente su sistemi cellulari o animali, (**Tab.II°.1.10.I°**).

Inoltre per tener conto della diversa suscettibilità al danno radiologico dei vari organi e tessuti e ottenere la "dose efficace", (**Tab.II°.1.10.I°**), è stato introdotto un ulteriore fattore di peso, (**w_T**), proporzionale alla probabilità che ogni organo o tessuto ha di produrre un danno, (per unità di dose equivalente), rispetto al corpo intero, misurato in frazione della dose totale assorbita dal corpo nel suo insieme, attribuibile all'organo in oggetto.

Tab.II°.1.10.I° – Coefficienti di peso per le radiazioni.

Tipo ed energia della radiazione.	Coefficiente w_R
Fotoni, ogni energia	1
Elettroni e muoni, ogni energia	1
Neutroni ≤ 10 keV	5
" 10 ÷ 100 keV	10
" 100 ÷ 2.000 keV	20
" 2 ÷ 20 MeV	10
" > 20 MeV	5
Protoni > 20 MeV	5
Particelle α, frammenti di fissione, nuclei pesanti	20

Coefficienti di peso per tessuti e organi.

Tessuti e organi	Coefficiente w_T
Gonadi	0,20
Colon, polmone, midollo osseo rosso, stomaco	0,12
Vescica, mammella, fegato, esofago, tiroide, altri tessuti	0,05
Superficie ossee, cute	0,01

Limiti di dosi.

Lavoratori addetti	100 mSv/5 anni
Popolazione	1 mSv/anno, (media su 5 anni)
Donne gravide	2 mSv durante la gestazione, (1 mSv al feto)

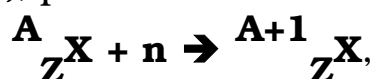
§ II°.1.11 – ORIGINE DEI NUCLEI ATOMICI.

Le stelle sono ammassi di materia che la contrazione gravitazionale porta a valori di densità e temperatura in grado di accendere e mantenere reazioni nucleari di fusione.

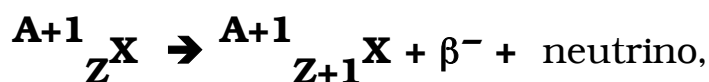
La struttura stellare risulta a gusci concentrici a diverso stadio contemporaneo di generazione nucleare.

Nella zona più esterna le particelle adroniche, (ovvero composte da quark e quindi soggette all'interazione forte), semplici, (protoni e neutroni), generate nei primi stadi dell'evoluzione cosmica, fondono in nuclei di elio che per maggiore massa si portano verso l'interno in uno strato intermedio ove crescenti valori di densità, pressione e temperatura ne permettono la fusione in nuclei più pesanti, (carbonio, ossigeno), e infine, nel nucleo della stella, fino al gruppo del ferro, (**A ~ 60**), oltre le cui dimensioni, le reazioni di fusione terminano di essere esoergiche per divenire endoergiche e la temperatura raggiunge quindi un massimo con le energie delle particelle, non più sostenute dall'energia di fusione, insufficienti a vincere la repulsione coulombiana delle cariche nucleari.

In queste reazioni di fusione, vengono liberati neutroni, (**n**), per cui ogni nucleo atomico, (**X**), può subire reazioni di cattura neutronica:



con creazione di isotopi a crescente numero di massa, (**A**), ed eventuale successivo decadimento beta:



con creazione di nuclei a crescente numero atomico, (**Z**).

I valori massimi delle dimensioni dei nuclei prodotti, sono limitati dalla crescente instabilità con la massa, mentre essendo la probabilità di formazione dei nuclei, inversamente proporzionale al numero di reazioni richieste, l'abbondanza dei vari elementi presenti nelle stelle, (a meno di diversi picchi relativi a configurazioni nucleari particolarmente stabili), e quindi nei corpi derivati, (pianeti, asteroidi, meteore, comete, ecc.), appare decrescente con la dimensione.

§ II°.1.12 – LA FISSIONE NUCLEARE

Già nel 1912 il fisico tedesco Otto Lummer esprimeva rammarico per l'impossibilità di accelerare il decadimento radioattivo allo scopo di ottenere energia utile.

Nel 1919 Rutherford ottenne la prima reazione nucleare artificiale.

Nel 1925 Walter Noddack, Ida Tacke e Otto Berg iniziarono una ricerca sistematica alla ricerca degli elementi: $Z = 43$ e $Z = 75$, ancora mancanti nella tavola periodica.

In base a previsioni sul comportamento chimico di ossidi, sali e solfuri di tali elementi fondato su quello di elementi vicini, selezionarono i più probabili minerali che potessero contenerli studiandoli sia dal punto di vista chimico che spettroscopico impiegando elevate dosi di raggi X ed effettivamente in molti spettri riuscirono a rivelarne la presenza dando loro il nome di measurium, (Ma), $Z = 43$ e rhenium, (Re), $Z = 75$.

La scoperta fu ampiamente criticata e non compresa al tempo: gli elementi, infatti, risultavano prodotti di fissione spontanea dell'uranio 238 e in seguito la scoperta dell'elemento $Z = 43$ fu riconosciuta a C. Perrier ed E. Segrè, (1937), che lo rinominarono technetium, (Te).

Non appena furono disponibili i neutroni, Enrico Fermi iniziò a impiegarli bombardando numerosi elementi allo scopo di ottenere radioattività artificiale.

Con uranio, tuttavia, iniziarono a verificarsi strani fenomeni che egli definì "decadimento complesso", e che Noddack e la Tacke ritennero caratterizzato da produzione di diversi frammenti di notevoli dimensioni, radioattivi e non prossimi agli elementi irradiati, e nel 1934 proposero la teoria della rottura del nucleo di uranio sotto bombardamento neutronico, ma ancora una volta il fenomeno non venne compreso e le loro teorie non accettate.

Nel frattempo in base al modello nucleare a goccia proposto da Niels Bhor nel quale come una goccia di liquido che ricevendo energia inizia a oscillare e può emettere radiazione termica o liberare molecole alla sua superficie, si ipotizzò che un nucleo bombardato da un neutrone potesse emettere radiazioni, (raggi γ), o particelle e si dischiuse la possibilità di creare nuclei artificiali con: $Z > 92$.

Infine a partire dagli esperimenti iniziati nei primi anni '30 a Berlino da Otto Hahn, Fritz Strassmann e l'austriaca Lise Meitner, nel 1938 l'evidenza sperimentale della presenza di bario come conseguenza del bombardamento di uranio, portò all'ipotesi dell'oscillazione del nucleo bombardato fino alla sua possibile rottura per repulsione coulombiana delle cariche dei due frammenti e fu coniato il termine "fissione".

Un paio di mesi dopo in Francia, Joliot scoprì che nella fissione venivano emessi neutroni secondari e si iniziò a studiare l'effetto dell'energia dei neutroni incidenti sulla probabilità di fissione.

Lo studio si indirizzò quindi alla possibilità di realizzare reazioni a catena a scopo esplosivo, (la seconda guerra mondiale era alla porte), e controllato, (produzione di energia).

In realtà la fisica nucleare mostra, (**Fig.II°1.1.3, 4**), che tutti i nuclei possono essere scissi fino ai costituenti nucleari semplici, (protoni e neutroni), qualora al nucleo, dalla condizione stabile sferica, venga ceduta l'energia sufficiente a superare la barriera di potenziale, (**DE**), coulombiana e che la reazione risulta esoergica per tutti i nuclei tali che: $16,3 \leq (Z^2/A) \leq 46,6$, ovvero che tutti i nuclei con: $A \geq 85$, $Z \geq 37$ sono in grado di liberare energia nel processo di scissione, (fissione).

Se, invece, la cessione di energia non è sufficiente al superamento della barriera di potenziale, a meno di oscillazioni attorno alla posizione metastabile, il nucleo non si fissiona.

Due nuclei per avvicinarsi, collidere e, al prevalere delle forze nucleari, fondere, per superare la barriera di potenziale repulsiva richiedono sufficiente energia cinetica, (ovvero, a meno di impraticabili sistemi di

acceleratori, di agitazione termica): $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \geq \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, alla

distanza di picco della curva energia potenziale, mentre per la scissione di un nucleo, l'energia cinetica della particella risulta inessenziale, ma è necessario portare il nucleo in uno stato di eccitazione, tramite cessione di energia interna al nucleo stesso.

Un modo per cedere energia a un nucleo, è colpirlo con una radiazione o con una particella.

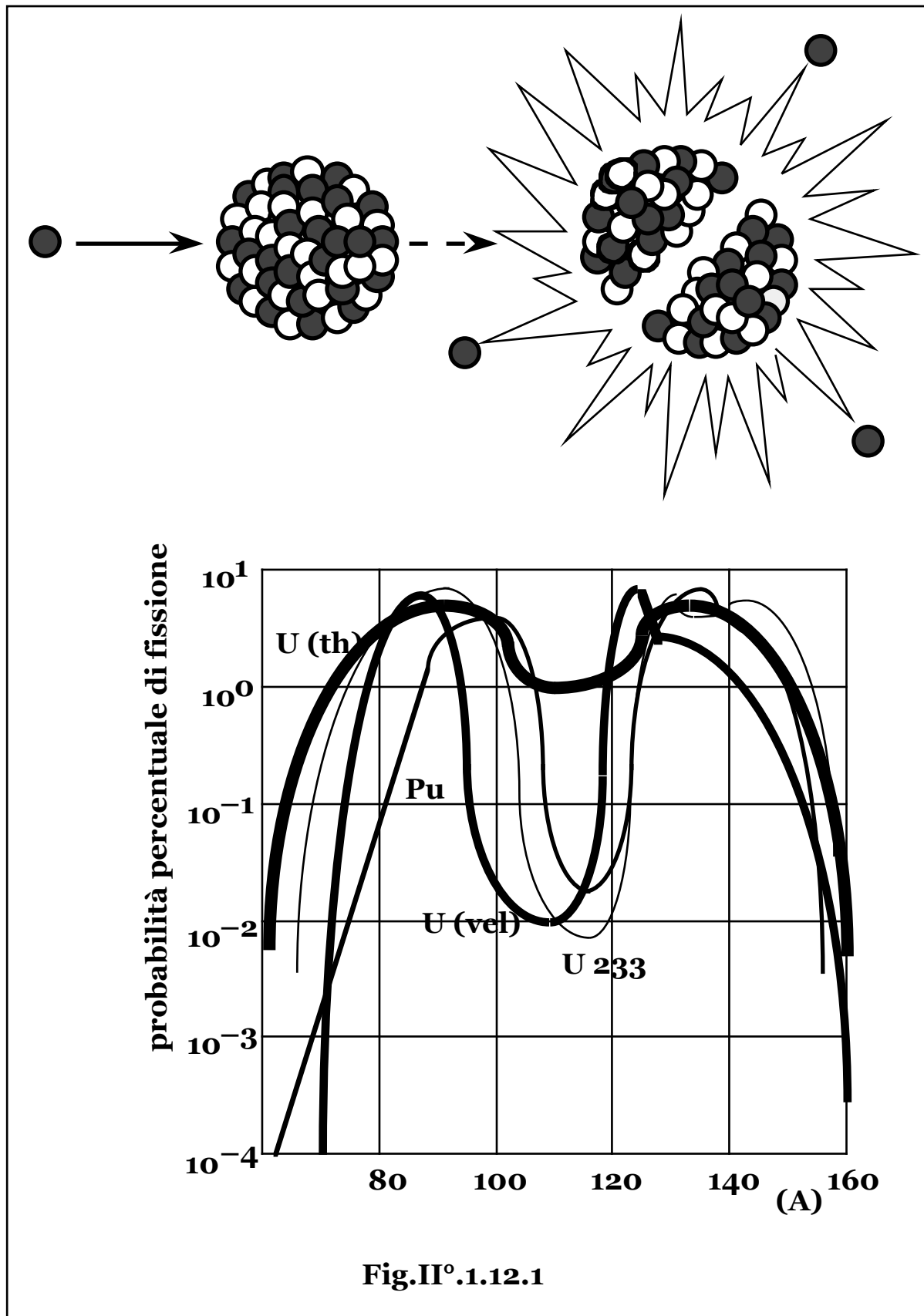
Le particelle cariche, tuttavia, a meno di energie impraticabili, vengono respinte dai nuclei, (positive), o dalla nube elettronica, (negative).

Il neutrone e le radiazioni elettromagnetiche, (X o gamma), invece, essendo privi di carica e quindi indifferenti ai campi di forza elettromagnetica, appaiono proiettili idonei.

Tuttavia le radiazioni elettromagnetiche vengono assorbite facilmente dai materiali riuscendo a penetrarne solo gli strati superficiali, mentre nell'impatto, essendo prive di massa, non comportano cessione di energia di legame e quindi per dare fissione, devono avere un'energia non inferiore alla barriera di potenziale del nucleo, che risultando nettamente superiore a quella, (1 ÷ 2,5 MeV), dei raggi gamma di fissione, preclude la possibilità di reazioni a catena.

Invece i neutroni, dotati di massa, divenendo parte del nucleo, liberano energia di legame e possedendo un coefficiente di assorbimento lineare

almeno tre ordini di grandezza inferiore alla radiazione ondulatoria, possono penetrare i materiali per diversi centimetri, apparendo pertanto i proiettili ideali.



Il neutrone, assorbito dal nucleo, (**Fig.II°.1.12.1**), gli cede la propria energia cinetica e di legame portandolo in uno stato eccitato.

Indicando con: E^* , E_c ed E_1 , l'energia di eccitazione del nucleo, cinetica e di legame del neutrone, rispettivamente, si ha: $E^* = E_c + E_1$.

La fissione è dunque possibile per: $E^* = E_c + E_1 > DE$.

Posta l'uguaglianza nella condizione, l'energia cinetica limite:

$E_c = DE - E_1$, risulta pertanto l'energia cinetica minima o di soglia, (E_s), che permette la fissione del nucleo bersaglio.

I materiali impiegabili come combustibili nucleari, devono innanzitutto rigenerare proiettili, (neutroni), in ogni fissione affinché la reazione possa teoricamente autosostenersi.

Nei nuclei atomici il rapporto N/Z risulta crescente con A , da cui un eccesso di neutroni rispetto ai protoni nei frammenti di fissione che li rende altamente radioattivi e porta all'emissione quasi immediata di alcuni neutroni di fissione e successivamente viene compensata con emissioni β , fino all'ottenimento di nuclei stabili.

Devono, inoltre, presentare valori di $DE \sim E_1$, affinché neutroni di energia non troppo elevata, (e comunque inferiore a quella dei neutroni di fissione), possano provocare fissione.

L'analisi della funzione: $E_b/A = E_b/A(Z, A)$, e della $DE = DE(Z, A)$, che

risulta: $DE(Z, A) = A^{2/3} \left(0,89 - 0,02 \frac{Z^2}{A} \right)$, mostra che la prima

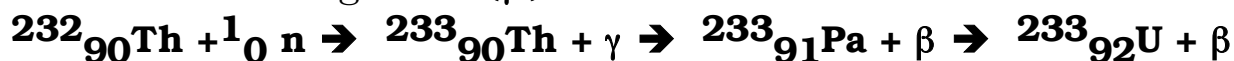
condizione è verificata solo dai nuclei con $Z \geq 90$, (per la crescente l'instabilità dei nuclei all'aumentare delle loro dimensioni, infatti, la soglia di perturbazione, o gradino di energia DE , decresce all'aumentare di A fino a risultare inferiore all'energia di legame del neutrone).

Si definiscono **fissili** i nuclei per i quali si ha: $E_s < 0$, quei nuclei, cioè, che per loro composizione e dimensioni, (e quindi condizioni di stabilità nucleare), sono già prossimi alla rottura spontanea presentando un DE inferiore all'energia di legame del neutrone e per i quali, quindi, l'aggiunta di uno solo di questi, (conseguentemente di qualunque energia cinetica anche nulla o trascurabile), rende possibile la fissione.

Risultano fissili i nuclei, (**Tab.II°.1.12.I°**): ${}_{92}^{235}\text{U}$, ${}_{92}^{233}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$.

In realtà poichè l'uranio è l'ultimo elemento naturale e ha composizione isotopica: **U238: 99,282%**; **U235: 0,712%**; **U234: 0,006 %**, solo l'**U 235** risulta materiale fissile naturale.

L'attenzione posta a due dei possibili elementi fissili artificiali, deriva dalle seguenti reazioni di cattura radiativa, (**n, γ**), ovvero cattura del neutrone ed emissione dell'energia di eccitazione sotto forma di radiazione elettromagnetica, (**γ**):



tramite le quali elementi non fissili come il torio e l'uranio 238, si tramutano in elementi fissili, (U233 e Pu 239), e vengono detti pertanto, **fertili**.

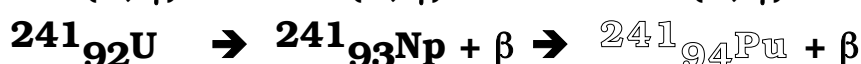
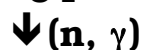
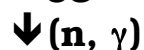
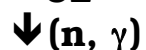
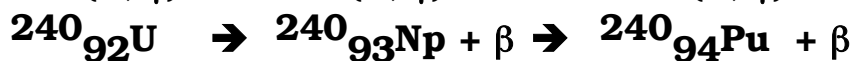
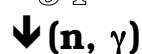
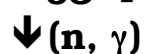
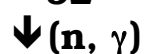
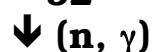
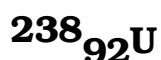
Tab.II°.1.12.I° – Parametri dei nuclidi pesanti.

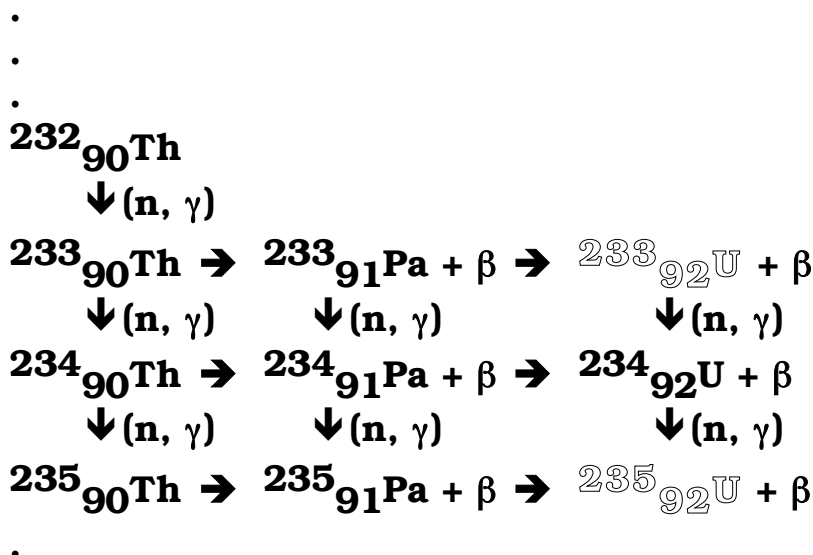
Nuclide	Z ² /A	DE	E ₁	E _s teorica	E _s sperimentale
Th 232	34,9	7,5	5,4	2,1	1,3
U 233	36,4	6,0	7,0	0	
U 235	36,0	6,5	6,8	0	
U 238	35,5	7,0	5,5	1,5	1,1
Pu 239	37,0	5,0	6,6	0	

La produzione di nuclei fissili non è limitata alle reazioni indicate, che pure risultano preponderanti.

Lo schema completo risulta una combinazione di successive catture neutroniche e decadimenti radioattivi.

Dallo schema, (ove appaiono cerchiati gli elementi fissili), si rileva che gli elementi più pesanti, (Pu 240, 241, ... o addirittura il ricongiungimento della catena del torio con quella dell'uranio), divengono sempre meno probabili, giustificando la preponderante influenza delle reazioni primarie.





I decadimenti β hanno tempi di dimezzamento dell'ordine dei minuti o, al massimo, dei giorni, mentre il decadimento α degli elementi pesanti fissili prodotti, (U 235, Pu 239, Pu 241,...), con vite medie dell'ordine di $10^4 \div 10^5$ anni, ne fa elementi praticamente stabili.

§ II°.1.13 – ENERGIA GENERABILE.

Nella fissione di un nucleo pesante, (uranio, torio, plutonio), si libera una energia, (E_0), pari a: $E_0 \approx 200 \text{ MeV} = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ J}$, (Tab. II°.1.13.I°), con una variazione non superiore al $\pm 3\%$ per i diversi combustibili e praticamente costante, ($\pm 1\%$), al variare dell'energia dei neutroni.

Tab.II°.1.13.I° – Energia liberata dalla fissione di combustibili nucleari.

Energia cinetica dei frammenti di fissione:	165	MeV
Raggi γ istantanei da frammenti di fissione:	7	"
Neutroni di fissione:	5	"
Raggi β ritardati, (decadimento prodotti fissione):	7	"
Raggi γ ritardati, (decadimento prodotti fissione):	6	"
Neutrini:	10	"
Totale:	200	"

Poichè **1 kg** di combustibile di massa atomica A_c , contiene:

$N_c = N_A/A_c$, ($A_c = 233 \div 239$), nuclei, si ottiene: $N_c = 2,52 \div 2,58 \cdot 10^{24} \text{ nuclei/kg}$ e quindi una energia specifica, (o potere calorifico), pari a: $8,16 \cdot 10^{13} \text{ J/kg} = 1,95 \cdot 10^{10} \text{ kcal/kg} = 1.950 \text{ TEP/kg}$.

Nel caso di uranio naturale, supponendo di fissionare solo l'uranio 235, si ottiene un'energia specifica di circa **$1,4 \cdot 10^8$ kcal/kg**, pari a circa **15.000 kg** di olio combustibile.

Una centrale nucleare da **1.000 MWe** con rendimento del **33%**, consuma pertanto **$3,68 \cdot 10^{-5}$ kg/s** di fissile, ovvero **$5,2 \cdot 10^{-3}$ kg/s** di uranio naturale, (circa **442 kg/giorno**, di cui **3 kg/giorno** di U 235 fissile), contro un quantitativo di **$6,5 \cdot 10^6$ kg/giorno** di olio.

Tenuto conto del consumo mondiale annuo di energia primaria per abitante, (**$6,35 \cdot 10^{10}$ J/ab. anno**), e della vita media, (auspicabilmente tendente a quella dei paesi più progrediti: **$T \sim 80$ anni**), il consumo medio globale risulta: **$5,08 \cdot 10^{12}$ J/ab.**, pari al potere calorifico di **62,25 gr** di fissile, (**8,75 kg** di uranio naturale), corrispondente alla quantità media di uranio presente in circa **1.100 m^3** di terreno, (un cubo di poco superiore a **10 m** di lato), mentre per i consumi dei paesi industrializzati, (**$2,35 \cdot 10^{11}$ J/ab. anno**), si ottengono **230 gr** di fissile, (**32,35 kg** di uranio naturale), contenuti in un cubo di terreno di meno di **16 m** di lato.

Essendo la densità media di popolazione mondiale pari a: **45 ab./km^2** , ogni abitante dispone di una superficie di terreno di oltre **20.000 m^2** /ab. e quindi di un volume di **20.000 m^3** in un metro di profondità, corrispondente a quasi venti volte quello necessario all'estrazione del fissile richiesto per i consumi energetici di tutta la vita, (per i paesi industrializzati quasi cinque volte).

Per contro tenuto conto di un volume medio di scorie radioattive prodotte di **$1,66 \cdot 10^{-14} \text{ m}^3/\text{J}$** , aventi costante di decadimento media:

$$c_{dr} = 6,9 \div 7,4 \cdot 10^{-3} \text{ anni}^{-1},$$

essendo la produzione di scorie per unità di tempo e per abitante:

$$\begin{aligned} R &= 6,35 \cdot 10^{10} \text{ J/ab. anno} \times 1,66 \cdot 10^{-14} \text{ m}^3/\text{J} = \\ &= 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{ab. anno}, \end{aligned}$$

in ogni istante: **$0 < t < T$** , la produzione infinitesima di scorie: **$R dt$** , alla fine della vita di ogni abitante, risulterebbe pari a: **$R e^{-c_{dr}(T-t)} dt$** , e quindi globalmente il volume finale di scorie:

$$\begin{aligned} \int_0^T R e^{-c_{dr}(T-t)} dt &= R e^{-c_{dr}T} \int_0^T e^{c_{dr}t} dt = \\ &= \frac{R e^{-c_{dr}T}}{c_{dr}} \left(e^{c_{dr}T} - 1 \right) = \frac{R}{c_{dr}} \left(1 - e^{-c_{dr}T} \right) = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3, \end{aligned}$$

inizialmente corrispondente a un cubo di lato pari a **40 cm/ab.**, (**62 cm/ab.** per i paesi industrializzati), e che si dimezzerebbe, ($T_{1/2} = \ln 2 / c_{dr} = 93,57 \div 100,51$ anni), circa ogni secolo.

A regime, ovvero a popolazione costante, la quantità volumica di scorie accumulata per abitante, ($m^3/ab.$), al tempo t , $[R_c(t)]$, soddisfa il bilancio: **$dR_c(t)/dt = \text{produzione} - \text{decadimento}$** ,

ovvero: **$dR_c(t)/dt = R - c_{dr}R_c(t)$** , la cui soluzione è pari a quella dell'omogenea associata, (costante $\times e^{-c_{dr}t}$), più un integrale particolare ottenibile, ad esempio, supponendo la funzione costante:

$R - c_{dr}R_c(t) = 0$, ovvero: **R/c_{dr}** , per la soluzione generale:

$R_c(t) = \text{costante} \times e^{-c_{dr}t} + R/c_{dr}$, da cui, posta l'origine dei tempi con quella di inizio dello sfruttamento dell'energia nucleare da fissione:

$R_c(0) = 0$, si ottiene: **$R_c(t) = \frac{R}{c_{dr}} \left(1 - e^{-c_{dr}t} \right)$** , monotona crescente da zero al valore asintotico: **R/c_{dr}** .

Per un valore iniziale diverso da zero, si ottiene:

$$R_c(t) = \frac{R}{c_{dr}} \left(1 - e^{-c_{dr}t} \right) + R_c(0)e^{-c_{dr}t},$$

funzione monotona, (decescente o crescente a seconda che risulti: **$R_c(0) > R/c_{dr}$** , ovvero **$R_c(0) < R/c_{dr}$**), e comunque tendente asintoticamente al medesimo valore: **R/c_{dr}** .

Per consumi medi mondiali, (**$6,35 \cdot 10^{10}$ J/ab. anno**), il valore asintotico risulta: **$0,1419 \div 0,1522$ m³/ab.**, corrispondente a un cubo di lato pari a circa **53 cm**.

Per consumi relativi ai paesi industrializzati, (**$2,35 \cdot 10^{11}$ J/ab. anno**), si ottiene un valore asintotico: **$0,5251 \div 0,5633$ m³/ab.**, corrispondente a un cubo di lato pari a circa **82 cm**.

§ II°.1.14 – SEZIONI D'URTO NELLA FISSIONE NUCLEARE.

La velocità dei neutroni: **$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$** , (2.185 m/s, alle energie termiche), per flussi dell'ordine di $10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, porta a valori di densità neutronica non superiori a $10^{15} \text{ neutroni/m}^{-3}$, a fronte di una densità di nuclei dell'ordine di $10^{28} \text{ nuclei/m}^{-3}$.

L'interazione diretta fra neutroni risulta quindi trascurabile come pure l'interazione indiretta, relativa alla modifica dello stato nucleare per precedenti interazioni.

Nella collisione neutrone-nucleo sono possibili vari eventi quantificati dalle rispettive sezioni d'urto, intese in senso probabilistico:

- cattura radiativa, (n, γ) , in cui il nucleo assorbe il neutrone incidente portandosi in uno stato eccitato ed emette l'energia, (cinetica e di legame), ricevuta, (o parte di essa), in forma di radiazione ondulatoria, (γ) : s_c ;
- collisione elastica in cui vi è scambio di sola quantità di moto, per cui data la differenza di massa, il neutrone mantiene praticamente invariata la sua energia: s_s ;
- collisione anelastica in cui parte dell'energia cinetica del neutrone si tramuta in energia di eccitazione del nucleo: s_a ;
- fissione: s_f .

Essendo il neutrone privo di carica, fra le particelle reagenti non si ha alcuna interazione elettromagnetica a distanza, per cui le sezioni d'urto relative a ogni tipo di reazione risultano crescenti al diminuire dell'energia del neutrone incidente, con andamento circa come $1/v$, divenendo la probabilità di interazione proporzionale al tempo di permanenza in vicinanza delle particelle.

Tuttavia, poichè quando l'energia del neutrone è prossima a quella di definite transizioni energetiche nucleari, (stati quantici), si verifica una particolare affinità all'interazione, la probabilità di cattura diviene elevatissima e si hanno dei picchi di sezione d'urto, (risonanze).

Per una densità n , (m^{-3}), di neutroni monoenergetici aventi velocità v , il prodotto: $F = nv$, risulta il flusso neutronico, ovvero il numero di neutroni che incide sull'unità di superficie nell'unità di tempo.

Poichè S rappresenta l'area efficace dei nuclei per unità di volume, il numero di reazioni per unità di volume e di tempo, (R), risulta:

$$R = (Ns)(nv) = S(nv) = SF \quad (m^{-3} s^{-1}).$$

Detto l_m il cammino libero medio fra due collisioni, il numero di interazioni per unità di tempo di una particella vale: v/l_m e il numero di reazioni: $R = nv/l_m = F/l_m$, ovvero: $l_m = 1/S$, in accordo con la definizione analitica del cammino libero medio.

§ II°.1.15 – IL REATTORE NUCLEARE.

Non esistono in natura sorgenti di neutroni liberi, pertanto affinché gli eventi di fissione possano essere mantenuti e realizzino una reazione a catena, è necessario che siano generati dalle reazioni stesse.

I neutroni emessi nella fissione hanno uno spettro energetico frazionario, esprimibile con la relazione: $\sqrt{\frac{2}{\pi e}} \sinh \sqrt{2E} e^{-E}$, che presenta un solo massimo per: **E = 0,72 MeV** e un valore medio pari a:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \sinh \sqrt{2E} e^{-E} E dE = 2 \text{ MeV},$$

e sono detti pertanto neutroni "veloci".

Per successive collisioni la loro energia diminuisce fino all'equilibrio con l'ambiente circostante, (**E_{th}**), e risulta allora: **E_{th} = kT = 0,025 eV** e i neutroni vengono detti "termici".

La possibilità di impiego di nuclei pesanti come combustibili nucleari in reazioni a catena, è dovuta alla liberazione di un numero: **h₀ = 2 ÷ 3**, di neutroni per ogni evento di fissione, (**Tab. II°.1.15.I°**).

Nei nuclei atomici, infatti, risultando il rapporto **N/Z** crescente con **A**, i frammenti di fissione presentano un eccesso di neutroni che tendono a compensare con emissione diretta di neutroni e successivi decadimenti β.

Tab. II°.1.15.I° – Numero di neutroni di fissione, (h₀).

Energia dei neutroni incidenti	Combustibili		
	U 233	U 235	Pu 239
Termica	2,50	2,44	2,90
Veloce	2,75	2,72	3,28

Per ogni nucleo combustibile sottoposto a bombardamento neutronico si definisce fattore di fertilità, (**h**), il rapporto: **h = $\frac{\text{neutroni emessi}}{\text{neutroni assorbiti}}$** .

Il fattore di fertilità differisce dal numero medio di neutroni emessi per fissione, (**h₀**), risultando comunque inferiore, in quanto a causa delle catture sterili, non tutti i neutroni assorbiti provocano fissione e conseguente liberazione di nuovi neutroni.

In caso di nuclei fissili poichè l'energia dei neutroni, (a meno della variazione di tutte le sezioni d'urto), è influente sulla possibilità di fissione, risultano perduti solo i neutroni assorbiti in catture sterili, (**s_c**), mentre la collisione di qualunque tipo, (**s_s, s_a**), non comporta perdite.

Viceversa in caso di nuclei fertili, la cui fissione richiede un'energia di soglia, la fertilità è nulla per neutroni termici (**s_f = 0**), mentre in caso di neutroni veloci, oltre all'assorbimento sterile, risulta un fenomeno di

perdita anche la collisione anelastica (s_a), che ne abbassa il livello energetico al di sotto della soglia, rendendoli inutilizzabili per la reazione di fissione.

Tenuto conto del significato probabilistico delle sezioni d'urto, l'espressione della fertilità risulta quindi:

	Nuclei fissili	Nuclei fertili
Neutroni veloci	$h = h_0 \frac{s_f}{s_f + s_c}$	$h = h_0 \frac{s_f}{s_f + s_c + s_a}$
Neutroni termici	$h = h_0 \frac{s_f}{s_f + s_c}$	$h = 0$

che per i nuclei impiegabili in reazioni a catena risulta, (**Tab. II°.1.15.II°**):

Pertanto poichè tutti i nuclei fissili per ogni energia presentano comunque valori di fertilità $h > 2$, la reazione a catena è teoricamente possibile sia con neutroni veloci che termici.

Tab. II°.1.15.II° – Fattore di fertilità, (h).

	U 233	U 235	Pu 239
Veloce	2,60	2,18	2,74
Termica	2,27	2,06	2,10

Per l'uranio naturale in zona termica, dalla definizione di fertilità, indicando con N_5 e N_8 le concentrazioni di uranio 235 fissile, (7,12‰), e uranio 238 fertile, (99,288 ‰), si ottiene:

$$h = \frac{FN_5 s_{f5} h_{o5}}{FN_5 (s_{f5} + s_{c5}) + FN_8 s_{c8}} = h_{o5} \frac{s_{f5}}{(s_{f5} + s_{c5}) + \frac{N_8}{N_5} s_{c8}}$$

Per aumento del denominatore del termine: $N_8 s_{c8} / N_5$, la fertilità si riduce passando dal valore:

$$h_5 = h_{o5} \frac{s_{f5}}{s_{f5} + s_{c5}} = 2,06, \text{ del fissile puro a: } h = 1,32, \text{ valore che}$$

rende l'uranio naturale, (pure attivo solo con la sua frazione di U235 fissile), un combustibile teoricamente impiegabile.

In zona veloce il fattore di fertilità per uranio naturale, (trascurando il contributo della collisione anelastica essendo presente materiale fissile), risulta:

$$h = \frac{FN_5 s_{f5} h_{o5} + FN_8 s_{f8} h_{o8}}{FN_5 (s_{f5} + s_{c5}) + FN_8 (s_{f8} + s_{c8})} = \frac{h_{o5} s_{f5} + \frac{N_8}{N_5} s_{f8} h_{o8}}{(s_{f5} + s_{c5}) + \frac{N_8}{N_5} (s_{f8} + s_{c8})}.$$

Tutte le sezioni d'urto, a meno degli intervalli di risonanza, (ove hanno picchi fino ad alcune migliaia di barns), diminuiscono all'aumentare dell'energia dei neutroni con legge $1/v$, divenendo inferiori a **10 b**, alle alte energie, (neutroni veloci), fino a coincidere, in pratica, con le sezioni geometriche dei nuclei da energie di circa: **0,1 MeV**, (**2 ÷ 3 b**), apparendo, quindi, tutte paragonabili.

La fertilità dell'uranio naturale in zona veloce, pertanto, ($s_{f5} \sim s_{c5} \sim s_{f8}$

$$\sim s_{c8}), \text{ tende al valore: } h \approx \frac{h_{o5} + \frac{N_8}{N_5} h_{o8}}{2 \left(1 + \frac{N_8}{N_5} \right)} \approx \frac{h_o}{2}, \text{ per: } h_{o5} \sim h_{o8}.$$

Rispetto al valore relativo alla zona termica, quindi, pur aumentando la fertilità del fissile, (da **2,06** a **2,18**), il contributo relativo dei termini a numeratore e denominatore nell'espressione, porta la fertilità a valori effettivi solo di poco superiori all'unità, (**1,09**), e quindi, considerando che non tutti i neutroni nati finiscono con l'essere assorbiti dal combustibile, il reattore a neutroni veloci e uranio naturale non è realizzabile.

Pertanto a meno di ottenere combustibili a elevati arricchimenti in fissile, (U 235), o di disporre di combustibili fissili artificiali, (U 233, Pu 239), per realizzare una reazione nucleare a catena con uranio naturale, i neutroni di fissione, (veloci), devono essere rallentati fino alle energie termiche nei reattori detti, conseguentemente, "termici".

§ II°.1.16 – IL RALLENTAMENTO DEI NEUTRONI.

Il rallentamento dei neutroni, (scoperto da Enrico Fermi nel 1934), avviene tramite urti, (paragonabili ai fenomeni di raffreddamento dei corpi ordinari), che il neutrone subisce con i nuclei del mezzo circostante, (che per la sua funzione di riduzione dell'energia del neutrone viene detto moderatore), fino all'equilibrio energetico con i nuclei circostanti.

Infatti alle energie dei neutroni di fissione, (~ **2 MeV**), corrisponde una

$$\text{temperatura: } T \sim \frac{E}{k} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ K}, \quad (\text{velocità:})$$

$\sqrt{\frac{2E}{m_n}} = 1,91 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, mentre i nuclei del mezzo a temperatura ambiente, (**T ~ 300 K**), risultano avere un'energia pari a:

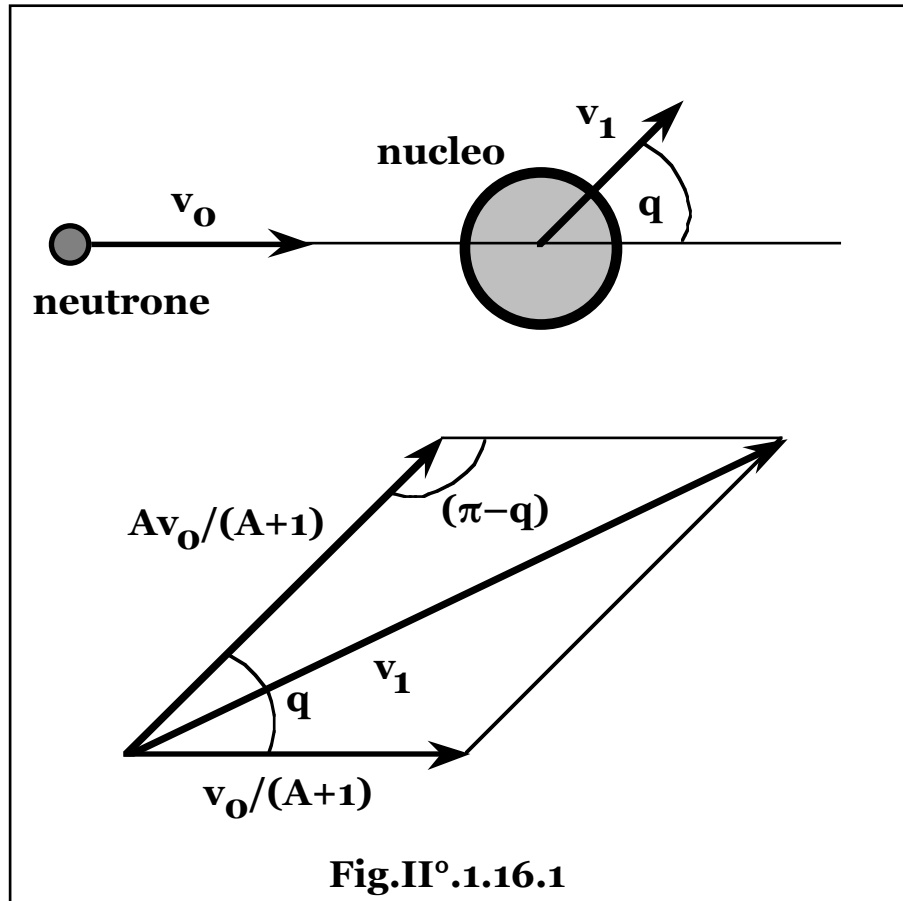
$$E = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,025 \text{ eV},$$

(velocità: $\sqrt{\frac{2E}{m_n}} = 2,14 \cdot 10^3 \text{ m/s}$).

Raggiunto l'equilibrio termico, il neutrone diffonde fino a essere assorbito da un nucleo.

Nel sistema delle due particelle rispettivamente di massa, (in **amu**), **A**, (nucleo), e circa unitaria, (neutrone), con nucleo fermo e neutrone a velocità **v₀**, (**Fig.II°.1.16.1**), verso il nucleo, la velocità del centro di

massa vale: $\frac{\mathbf{v_0} \times 1 + \mathbf{A} \times \mathbf{0}}{\mathbf{A} + 1} = \frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{A} + 1}$, e di conseguenza nel sistema baricentrico il neutrone si muove con velocità: **v₀ - v₀/(A + 1) = Av₀/(A + 1)**, mentre il nucleo assume la velocità opposta a quella del centro di massa: **- v₀/(A + 1)**.



La quantità di moto totale di un sistema di corpi in un sistema di riferimento baricentrico, risulta comunque nulla.

Pertanto supponendo l'urto elastico per il principio di conservazione della quantità di moto, il valore nullo si mantiene anche dopo la collisione, per cui il nucleo, (a meno dell'angolo \mathbf{q} di deviazione di traiettoria del neutrone), si muove in direzione opposta a quella del neutrone con rapporto di velocità inverso a quello delle masse, $(\mathbf{1/A})$. Per la conservazione dell'energia cinetica, la somma dei quadrati delle velocità del neutrone e del nucleo prima e dopo l'urto, per le rispettive masse, sono uguali.

Pertanto le radici delle rispettive energie cinetiche, rappresentano i cateti di un triangolo retto inscritto in una circonferenza di diametro pari alla radice della somma dei quadrati stessi, fra le cui infinite coppie, il comune rapporto fra le velocità, $(\mathbf{1/A})$, ne fissa il valore coincidente, (per un osservatore baricentrico, cioè, dopo la collisione le particelle si allontanano in direzioni opposte, con velocità ruotate dell'angolo \mathbf{q} , e immutate in modulo).

La velocità del neutrone dopo la collisione nel sistema fisso, $(\mathbf{v_1})$, si ottiene aggiungendo il vettore velocità del centro di massa: $\frac{\mathbf{v_o}}{\mathbf{A+1}}$, al vettore velocità del neutrone nel sistema baricentrico: $\frac{\mathbf{Av_o}}{\mathbf{A+1}}$, (**Fig.II°.1.16.1**), che vale, (legge dei coseni):

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1^2} &= \left(\frac{\mathbf{Av_o}}{\mathbf{A+1}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{v_o}}{\mathbf{A+1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\mathbf{Av_o}}{\mathbf{A+1}} \right) \left(\frac{\mathbf{v_o}}{\mathbf{A+1}} \right) \cos(\pi - \mathbf{q}) = \\ &= \left(\frac{\mathbf{Av_o}}{\mathbf{A+1}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{v_o}}{\mathbf{A+1}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\mathbf{Av_o}}{\mathbf{A+1}} \right) \left(\frac{\mathbf{v_o}}{\mathbf{A+1}} \right) \cos \mathbf{q} = \left(\mathbf{v_o^2} \right) \frac{\mathbf{A^2 + 2Acosq + 1}}{(\mathbf{A+1})^2}. \end{aligned}$$

Il rapporto fra l'energia cinetica del neutrone dopo, $(\mathbf{E_1})$, e prima, $(\mathbf{E_o})$, dell'urto, vale quindi:

$$\frac{\mathbf{E_1}}{\mathbf{E_o}} = \frac{\frac{1}{2} m \mathbf{v_1^2}}{\frac{1}{2} m \mathbf{v_o^2}} = \frac{\left(\mathbf{v_o^2} \right) \frac{\mathbf{A^2 + 2Acosq + 1}}{(\mathbf{A+1})^2}}{\left(\mathbf{v_o^2} \right)} = \frac{\mathbf{A^2 + 2Acosq + 1}}{(\mathbf{A+1})^2}.$$

Al variare dell'angolo di deflessione, da riflessione indietro, $(\mathbf{q} = \pi)$, a direzione invariata, $(\mathbf{q} = 0)$, il rapporto di energie risulta quindi

compreso fra: $\frac{(\mathbf{A-1})^2}{(\mathbf{A+1})^2} \leq \frac{\mathbf{E_1}}{\mathbf{E_o}} \leq 1$.

Il limite inferiore: $\frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$, da valore nullo con idrogeno, ($A = 1$), ovvero

energia del neutrone dopo un solo urto di qualunque valore fra quello iniziale e zero, ($0 \leq E_1/E_0 \leq 1$), risulta rapidamente crescente con le dimensioni del nucleo bersaglio, (con grafite, $A = 12$, risulta:

$0,72 \leq E_1/E_0 \leq 1$), fino a valori quasi unitari, ovvero neutroni a energia praticamente invariata, con nuclei bersaglio di combustibile, ($A = 233 \sim 239$): $0,98 \leq E_1/E_0 \leq 1$.

In ogni caso l'angolo medio di deflessione risulta prossimo alla media fra deflessione nulla, ($q = 0$), e indietro, ($q = \pi$): $q \sim \pi/2$, da cui:

$$\frac{E_1}{E_0} \approx \frac{A^2 + 1}{(A + 1)^2}, \text{ con: } 0,5 \leq E_1/E_0 \leq 0,99, \text{ per: } 1 \leq A \leq 238.$$

Eventuali collisioni neutrone-elettrone risultano trascurabili, (a meno della variazione di direzione, inessenziale data l'isotropia del mezzo), essendo la massima perdita frazionaria di energia per collisione con un

$$\text{elettrone, } (A = 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ amu}): \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2} \sim 10^{-3}.$$

Pertanto per l'ottenimento di significativi effetti moderanti, è comunque tassativo l'impiego di nuclei bersaglio a basso valore di A .

Supponendo $(E_0/E_1) = \text{costante}$, dopo n urti si ha: $\frac{E_0}{E_n} = \left(\frac{E_0}{E_1}\right)^n$,

$$\text{da cui: } n = \frac{\ln \frac{E_0}{E_n}}{\ln \frac{E_0}{E_1}}.$$

Indicando con: $z = \ln(E_0/E_1)$, la variazione logaritmica media di energia in una collisione, per: $E_0 = 2 \text{ Mev}$ e $E_n = 0,025 \text{ eV}$, il numero di urti necessario alla termalizzazione, (n_{th}), risulta:

$$n_{th} = \frac{\ln \frac{2 \cdot 10^6}{0,025}}{\ln \frac{E_0}{E_1}} = 18,2/z.$$

Noto sperimentalmente il valore di z , si ottiene il valore dell'angolo

medio di deflessione dalla relazione: $\frac{A^2 + 2A \cos q + 1}{(A + 1)^2} = \frac{E_1}{E_0} = e^{-z}$,

ovvero: $\bar{q} = \cos^{-1} \left\{ \frac{(A+1)^2 e^{-z} - (A^2 + 1)}{2A} \right\}.$

Per nuclei bersaglio leggeri, l'angolo di deflessione risulta essenziale, fino al limite di idrogeno per cui si ha:

$$0 \leq E_1/E_0 \leq 1, (00 < z \leq 0), \text{ per: } \pi \leq q \leq 0.$$

Per nuclei bersaglio pesanti, invece, l'angolo di deflessione diviene inessenziale, risultando: $E_1/E_0 \rightarrow 1; z \rightarrow 0, \forall q.$

§ II°.1.17 – PROPRIETA' DEI MODERATORI.

Le caratteristiche richieste ai materiali da impiegarsi come moderatori risultano:

- elevata affinità alla collisione, e cioè una elevata sezione d'urto, (macroscopica), di collisione, S_s , affinché la termalizzazione avvenga rapidamente, ovvero prima che i neutroni abbandonino il reattore;
- elevata perdita media di energia per collisione, ovvero un elevato valore di z , affinché la termalizzazione si ottenga con il minimo numero di collisioni per ognuna delle quali ogni nucleo presenta una sezione d'urto di cattura non nulla;
- minima tendenza alla cattura dei neutroni, ovvero minima sezione d'urto, (macroscopica), di cattura, S_c , che in tal caso risulterebbero persi per la reazione a catena.

Per la valutazione quantitativa delle caratteristiche dei moderatori si definiscono, quindi, i parametri zS_s , (**potere rallentante**) e (zS_s/S_c) , (**rapporto di moderazione**).

Assumendo un modello continuo del rallentamento, (in realtà discreto tanto più quanto minore è il numero atomico del moderatore), in un tempo infinitesimo dt il neutrone subisce un numero infinitesimo di urti: $dn = (vdt/l_{ms})$, con: $l_{ms} = 1/S_s$, cammino libero medio di collisione, da cui, essendo: $\ln(E_0/E) = n \ln(E_0/E_1) = n z$, si ottiene:

$$d\left(\ln \frac{E_0}{E}\right) = z dn = z \frac{vdt}{l_{ms}}, \text{ ovvero: } -\frac{dE}{E} = z \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{dt}{l_{ms}}, \text{ essendo:}$$

$E = 1/2 mv^2$, che integrata fra E_0 e E_{th} , fornisce il tempo, (t_{rall}), di rallentamento:

$$t_{rall} = \frac{l_{ms} \sqrt{2m}}{z} \left(\frac{1}{\sqrt{E_{th}}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right) = 9,15 \cdot 10^{-4} \frac{l_{ms}}{z}.$$

Il tempo di diffusione, (t_{diff}), risulta:

$$t_{\text{diff}} = \frac{l_{\text{mc}}}{v} = l_{\text{mc}} \sqrt{\frac{m}{2E_{\text{th}}}} = 4,6 \cdot 10^{-4} l_{\text{mc}},$$

con: $l_{\text{mc}} = 1/S_{\text{c}}$, cammino libero medio di cattura, (**Tab.II°.1.17.I°**).

Tab.II°.1.17.I° – Parametri di moderazione di alcuni materiali.

	A	z (*)	q (rad)	n_{th}	zS_s (m ⁻¹)	zS_s/S_c	t_{rall} (s)	t_{diff} (s)
Acqua	–	0,927 (0,693)	1,78 (**)	19	153	70	10⁻⁵	2,1 10⁻⁴
Acqua pesante	–	0,510 (0,588)	1,47 (**)	35	18	21.000	4,6 10⁻⁵	0,15
Elio	4	0,425 (0,386)	1,65	43	0,001 6	83	0,5719	23,86
Berillio	9	0,209 (0,198)	1,62	86	16	150	7,0 10⁻⁵	4,3 10⁻³
Grafite	12	0,158 (0,153)	1,60	114	63	170	1,5 10⁻⁴	1,2 10⁻²

(*) Fra parentesi i valori per: $q = \pi/2$.

(**) Trascurando l'effetto moderante dell'ossigeno, ($0,89 \leq E_1/E_0 \leq 1$).

La legge di collisione, (con modello continuo di rallentamento), stabilisce inoltre un legame fra le variabili tempo ed energia, fissando l'espressione della velocità di decremento energetico:

$$-\frac{dE}{dt} = zvS_s E = \frac{zvE}{l_{ms}}.$$

§ II°.1.18 – REALIZZAZIONE DI SISTEMI MOLTIPLICANTI.

Il numero di reazioni di fissione, e quindi la potenza del reattore, risulta proporzionale al flusso neutronico, ($R = Ns_f nv = S_f F$).

Pertanto per il sostentamento di una reazione nucleare a catena, deve mantenersi la popolazione di neutroni.

La disponibilità di combustibile sotto forma di uranio naturale, ha indirizzato lo sviluppo verso i reattori termici che risultano, inoltre, più agevolmente controllabili e di più semplice costruzione.

In un sistema di dimensioni infinite, (ovvero in caso di poter trascurare le fughe di neutroni alle pareti), definiti i parametri:

- e fattore di fissione veloce:** incremento della popolazione neutronica per probabilità di eventi di fissione veloce prima del rallentamento;
- p fattore di trasparenza:** probabilità del neutrone di divenire termico ovvero di non subire catture sterili durante il rallentamento, detta anche di fuga alle risonanze che il combustibile presenta per energie comprese nel rallentamento essendo assai inferiore, a paragone, la probabilità di assorbimento per altre collisioni;
- f fattore di utilizzazione termica:** probabilità del neutrone divenuto termico, e quindi durante la diffusione, di essere catturato dal combustibile, (con qualunque esito essendo considerata la cattura sterile da parte del combustibile nell'espressione della fertilità),

si ha che ogni generazione neutronica è pari a quella precedente moltiplicata per il fattore: $k_{00} = ehpf$, (formula dei quattro fattori), che risulta il "**fattore di moltiplicazione infinito**".

La condizione di autosostentamento della reazione risulta quindi:

$$k_{00} = 1.$$

§ II°.1.19 – IL REATTORE TERMICO OMOGENEO.

In base alla conoscenza, (sperimentale), dell'andamento delle sezioni d'urto in funzione dell'energia del neutrone per i vari nuclei e per i diversi tipi di reazione, è possibile la valutazione quantitativa dei parametri utili e l'ottimizzazione della composizione relativa del combustibile e del moderatore in ogni sistema moltiplicante.

In un sistema costituito da combustibile omogeneamente mescolato al moderatore, (**reattore omogeneo**), si ha: $e \sim 1$, in quanto dal calcolo di composizione ottimale, risulta un rapporto nuclei moderatore/nuclei combustibile, (N_m/N_c), di alcune centinaia e pertanto è massima la probabilità che un neutrone di fissione incontri nuclei di moderatore e inizi il rallentamento, piuttosto che collida con un nucleo di combustibile dando fissione veloce.

Il fattore di trasparenza **p** e il fattore di utilizzazione termica **f**, hanno andamenti opposti in funzione della concentrazione di combustibile.

Il fattore **f** tende all'unità in presenza di solo combustibile, ($N_c/N_m \rightarrow \infty$), e a zero in presenza di solo moderatore, ($N_c/N_m \rightarrow 0$), mentre, all'opposto, **p** cresce al diminuire della presenza di combustibile. Risulta, quindi, possibile massimizzare il prodotto **pf**.

Il fattore di fertilità, (**h**), indicando con i pedici **5** e **8** le grandezze relative ai due isotopi di uranio, (U 235, U 238), risulta:

$$h = h_0 \frac{N_5 s_{f5}}{N_5 s_{f5} + N_5 s_{c5} + N_8 s_{c8}},$$

essendo $s_{f8} = 0$, in zona termica.

Posto: $m = N_5/N_8$ ed essendo:

$h_0 \sim 2,5$; $s_{f5} = 549$ b; $s_{c5} = 101$ b; $s_{c8} = 2,8$ b, si ottiene:

$$h(m) = \frac{490}{232 + \frac{1}{m}}.$$

Per: $m = \frac{7,12 \cdot 10^{-3}}{1 - 7,12 \cdot 10^{-3}} = 7,17 \cdot 10^{-3}$, (uranio naturale), risulta quindi:

$h = 1,32$, mentre per $m \rightarrow \infty$, (uranio 235 puro), si ha: $h = 2,1$.

Tuttavia la curva $h = h(m)$, ha andamento asintotico verso l'orizzontale con concavità costantemente negativa, per cui ridotti incrementi della variabile indipendente comportano rilevanti incrementi della variabile dipendente e in pratica per deboli arricchimenti, ($\sim 5\%$), si ottiene:

$h = 1,95$, ovvero circa l'**80%** dell'aumento possibile della fertilità del combustibile.

L'arricchimento in piccole frazioni di fissile del combustibile è pertanto la tecnica più seguita negli attuali reattori.

La possibilità di realizzare sistemi moltiplicanti, ($k_{00} = ehpf \geq 1$), detta condizione di "**criticità**", può quindi essere valutata per tutte le combinazioni combustibile-moderatore ottimizzandone la composizione relativa.

Con uranio naturale si ha: $e \sim 1$; $h = 1,32$.

Scelto come moderatore la grafite, si ottiene: $(pf)_{max} = 0,6$, per:

$N_c/N_m = 1/400$, da cui: $k_{00} = 0,79$.

Introducendo l'arricchimento, la condizione limite:

$$k_{00} = 0,6 \quad h = 0,6 \frac{490}{232 + \frac{1}{m}} = 1, \quad \text{porge: } m = 0,016, \quad \text{ovvero un}$$

$$\text{arricchimento in fissile: } \frac{N_5}{N_5 + N_8} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} = 1,57 \%.$$

Impiegando acqua come moderatore, risulta un k_{00} lievemente inferiore all'unità e quindi modesti arricchimenti portano alla criticità.

Con acqua pesante, si ha: $(pf)_{max} = 0,856$, per $N_c/N_m = 1/500$, da cui: $k_{00} = 1,13$, (l'acqua pesante si dimostra il miglior moderatore per il buon potere moderante dovuto alle ridotte dimensioni del deuterio e

l'ottimo rapporto di moderazione essendo la molecola composta da due nuclei magici).

Il reattore termico omogeneo a uranio naturale è, quindi, teoricamente realizzabile solo impiegando acqua pesante come moderatore.

§ II°.1.20 – IL REATTORE TERMICO ETEROGENEO.

In una struttura discreta di combustibile e moderatore, composta da un insieme di elementi di uranio in forma sferica o di barre cilindriche, prismatiche, o altra geometria, immersi in una matrice di materiale moderante, il fattore di fissione veloce **e** diviene maggiore di uno essendo apprezzabile per un neutrone nato all'interno dell'elemento di combustibile, la probabilità di collidere con un nucleo di uranio dando fissione veloce, prima di uscire dall'elemento stesso e iniziare il rallentamento.

Il suo valore dipende dalla geometria del sistema e appare comunque pari a circa: **e = 1,03 ÷ 1,04**.

Anche il fattore di trasparenza **p** aumenta. Infatti i neutroni che entrano nell'elemento di combustibile con energie comprese nell'intervallo di risonanza dell'U 238, (**1 ÷ 200 eV**), vengono quasi completamente assorbiti in un sottile strato superficiale dell'elemento. Quelli con energie maggiori escono dall'elemento praticamente con la stessa energia, (**A >>1**), mentre quelli con energia inferiore sono molto più facilmente assorbiti dall'U 235 che non dall'U 238.

Pertanto l'effetto globale dell'eterogeneità del sistema, è di rendere attiva, (agli effetti dell'assorbimento parassita di neutroni alle risonanze), solo la frazione di U 238 distribuita sulla superficie degli elementi di combustibile, ovvero di aumentare la probabilità **p**.

Esiste inoltre la probabilità che il neutrone scenda al di sotto dell'intervallo di risonanza nel primo tratto di moderatore attraversato, non correndo successivamente alcun rischio di venire catturato alle risonanze.

Il fattore di utilizzazione termica **f**, invece, diminuisce.

Infatti per l'assenza di moderazione, all'interno dell'elemento di combustibile l'energia media dei neutroni risulta maggiore rispetto al moderatore con diminuzione del relativo flusso termico. Ne consegue un minore utilizzo neutronico da parte del combustibile, essendo crescenti tutte le sezioni d'urto al diminuire dell'energia dei neutroni.

Per la valutazione delle condizioni di criticità nel caso di reattori eterogenei, l'ottimizzazione dei parametri **e**, **p**, **f**, (**h** dipende solo dal combustibile), non dipende solo dal rapporto **N_c/N_m**, ma anche dalla geometria del sistema.

In caso di uranio naturale si ottiene:

- grafite: $k_{00} = 1,0625$;
- acqua: $k_{00} = 0,97$;
- acqua pesante: $k_{00} = 1,25$.

I reattori nucleari eterogenei a uranio naturale sono quindi realizzabili con grafite e acqua pesante, mentre con acqua leggera sono necessari arricchimenti, seppure di lieve entità.

In ogni caso, comunque, la geometria eterogenea risulta conveniente comportando sempre un aumento del k_{00} ottimizzato e di fatto non si sono avute realizzazioni commerciali di reattori omogenei.

§ II°.1.21 – DIMENSIONAMENTO DEI REATTORI NUCLEARI.

L'imponente e relativamente improvviso sviluppo e diffusione dell'informatica avvenuti negli ultimi decenni, non ha semplicemente permesso una crescente velocizzazione di ogni tipo di calcolo, ma ha portato alla realizzazione di un nuovo tipo di modellistica matematica, basato sulla possibilità di risoluzione di sistemi di equazioni precedentemente limitati a mera definizione teorica, con possibilità di valutazione solo in casi particolari semplificati.

Parimenti in molti campi della fisica, (tipicamente meteorologia e cosmologia), il progresso ha iniziato ad avvenire unicamente affidando a elaboratori sempre più potenti equazioni e ipotesi fisiche verificandone la validità solo in base ai risultati dei modelli sviluppati dai procedimenti di calcolo.

Se da un lato questo ha enormemente ampliato le conoscenze proponendosi come inevitabile e insostituibile strumento di valutazione del futuro, dall'altro esclude in maniera crescente la visione e sintesi umana dei processi e delle leggi fisiche, apparendo potenzialmente limitativo dello sviluppo mentale.

Si assiste infatti, alla presenza di sofisticate tecniche di modellizzazione numerica allestite indipendentemente da qualunque problema fisico e alla definizione della realtà, o comportamento della natura, non più come comprensione dell'intima essenza delle leggi che governano i fenomeni fisici tramite deduzioni della logica umana, ma come responso dei sistemi di calcolo sviluppati, frutto di un "oracolo informatico", in cui in sostanza, la realtà fisica viene sostituita dalla "verità informatica".

Il dimensionamento dei reattori nucleari risulta un tipico esempio di questa metodologia, risultando un sistema di relazioni di bilancio

neutronico, descritte da sistemi di equazioni differenziali non lineari di più variabili.

La realizzazione dei primi reattori con definizione delle condizioni critiche, appartiene invece, al periodo del regno calcolatore o al più delle calcolatrici meccaniche, (o della materia grigia al posto del bit), come uno degli ultimi risultati di intuizioni fisiche ed espedienti di calcolo che, pur nella loro approssimazione, rappresentano uno dei più alti esempi delle capacità deduttive e realizzative umane.

Gradiente. Divergenza. Legge della Diffusione, (I° Legge di Fick).

Si definisce gradiente di un campo scalare, (**f**), la grandezza vettoriale, (**J**), che ha per componenti cartesiane le corrispondenti derivate parziali

$$\text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{y}} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \bar{\mathbf{k}}.$$

Ogni grandezza fisica descritta da una funzione scalare variabile nello spazio, funge da ente motore, generando una grandezza vettoriale, (ente indotto), definibile come densità di flusso, (**J**), della grandezza, pari a:

J = - **D** grad **f** (**x**, **y**, **z**), (Legge della diffusione o I° Legge di Fick), con **D** costante di proporzionalità detta diffusività, o coefficiente di diffusione che quantifica la rapidità di propagazione, dipendente dalle caratteristiche dei materiali e di esercizio, (il segno negativo risulta dalla direzione del flusso, opposto alla direzione di crescita della grandezza).

La divergenza di un campo vettoriale, (**J**), è un operatore che fornisce la

$$\text{grandezza scalare: } \text{div } \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}.$$

La quantità della grandezza flusso che in un tempo infinitesimo **dt** attraversa una superficie infinitesima **dS**, vale: **J** x **n** **dS** **dt**, con **n** versore normale alla superficie infinitesima passante per il centro della superficie e orientato nel verso uscente.

Pertanto la fuga da un elemento di volume, omogeneo e isotropo **DV**, di superficie di frontiera **DS**, vale in un tempo infinitesimo:

$$\mathbf{dt} \int_{\mathbf{DS}} \mathbf{J} \times \mathbf{n} \, d\mathbf{S}, \text{ o per il teorema di Gauss: } - \mathbf{dt} \int_{\mathbf{DV}} \text{div } \mathbf{J} \, d\mathbf{V}.$$

Qualora la grandezza vettoriale, (**J**), derivi da un campo scalare, (**f**),

$$\text{si ha: } - \mathbf{dt} \int_{\mathbf{DV}} \text{div } \mathbf{J} \, d\mathbf{V} = - \mathbf{dt} \int_{\mathbf{DV}} \text{div } [- \mathbf{D} \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})] \, d\mathbf{V} =$$

$$= \mathbf{dt} \, \mathbf{D} \int_{\mathbf{DV}} \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) \, d\mathbf{V}, \text{ essendo: } \text{div grad} \equiv \nabla^2, (\nabla^2 \text{ Laplaciano}$$

della funzione), e quindi per unità di tempo e di volume: **D** $\nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$.

In condizioni stazionarie quindi, una divergenza non nulla di un vettore estesa a una superficie chiusa, indica la presenza di una sorgente del campo vettoriale.

In geometria piana in un cubetto elementare isotropo, la funzione sulle facce opposte varia di: $(\delta f / \delta x) dx$, $(\delta f / \delta y) dy$, $(\delta f / \delta z) dz$.

Il flusso trasmesso nella direzione x risulta quindi:

$$- D dydz [\delta f(x,y,z,t) / \delta x - \delta f(x+dx,y,z,t) / \delta x] = \\ = D dydz [\delta^2 f(x,y,z,t) / \delta x^2] dx = D [\delta^2 f(x,y,z,t) / \delta x^2] dx dy dz,$$

e sommando i contributi nelle tre direzioni cartesiane:

$$D[\delta^2 f(x,y,z,t) / \delta x^2 + \delta^2 f(x,y,z,t) / \delta y^2 + \delta^2 f(x,y,z,t) / \delta z^2] dx dy dz = \\ = D \nabla^2 f(x,y,z,t) dx dy dz, \text{ ovvero: } D \nabla^2 f(x,y,z,t), \text{ per unit\`a di volume.}$$

Legge di continuit\`a, (II° Legge di Fick).

In regime variabile e in assenza di sorgenti interne, il flusso netto della grandezza vettoriale che esce dall'unit\`a di volume, nell'unit\`a di tempo, per continuit\`a, deve eguagliare la variazione temporale interna della grandezza scalare: $D \nabla^2 f(x,y,z,t) = c_2 \delta f(x,y,z,t) / \delta t$, (equazione di Fourier), con c_2 costante dipendente dalle caratteristiche dei materiali e di esercizio ovvero: $\nabla^2 f(x,y,z,t) = c_2 / D \delta f(x,y,z,t) / \delta t$.

La variazione spaziale di una grandezza, genera quindi una corrispondente variazione temporale della medesima grandezza legate dalla relazione: $\nabla^2 f(x,y,z,t) = \text{costante} \times \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}$, (II° Legge di Fick), con costante di proporzionalit\`a dipendente dalla natura del fenomeno e dalle caratteristiche dei materiali coinvolti e di esercizio.

Fattore di moltiplicazione effettivo.

Le dimensioni necessariamente finite di un reattore nucleare comportano fughe di neutroni alle pareti durante il processo di rallentamento e diffusione, prima dell'assorbimento.

Pertanto potendosi considerare utile ai fini dei bilanci, solo la frazione di neutroni per i quali i processi di rallentamento, diffusione e assorbimento avvengono all'interno del reattore, il fattore di moltiplicazione, dal suo valore massimo, (k_{00}) , per sistemi di dimensioni infinite, (o senza perdite di neutroni alle pareti), tende a diminuire con le dimensioni, o pi\`u precisamente con il rapporto volume/superficie del reattore, (proporzionale alle dimensioni del

sistema per qualunque geometria), essendo la generazione di neutroni un fenomeno di volume e le fughe alle pareti, di superficie.

Il dimensionamento di un reattore nucleare, (a parametri neutronici e geometrici ottimizzati), come sistema in grado di mantenersi alla criticità, consiste nella determinazione della dipendenza del fattore di moltiplicazione dalle dimensioni del sistema.

A partire da una combinazione neutronicamente realizzabile, ($k_{00} > 1$), le dimensioni minime compatibili con una reazione a catena autosostenentesi, (fattore di moltiplicazione unitario), identificano la massa minima, (detta "**massa critica**"), necessaria alla realizzazione di un reattore, al di sotto della quale, cioè, è preclusa qualunque possibile realizzazione e che analiticamente corrisponde al regime stazionario, (popolazione neutronica e quindi potenza del reattore costante).

Indicando con:

P_r la probabilità per un neutrone di non sfuggire durante il rallentamento;

P_d la probabilità per un neutrone di non sfuggire durante la diffusione,

il rapporto fra due generazioni contigue di neutroni, tenuto conto delle fughe alle pareti, definito **fattore di moltiplicazione effettivo**, (k_{eff}), risulta: $k_{eff} = k_{00}P_rP_d$, con condizione di criticità:

$$k_{eff} = k_{00}P_rP_d = 1.$$

Teoria dello stato critico. Modello a Gruppi di Energia.

Il bilancio neutronico consiste nell'analisi della popolazione neutronica all'interno di un dato volume di reattore.

In un reattore termico, ovvero in caso di moderazione del flusso neutronico dall'energia di fissione a quella termica, è presente una distribuzione in energia dei neutroni, (costante nel tempo nello stato stazionario), da quella di origine a quella di equilibrio con i materiali presenti, e l'equazione di bilancio può quindi essere scritta per ogni valore di energia.

Per un calcolo sufficientemente rigoroso delle condizioni di criticità in funzione delle dimensioni del reattore, si impiega la teoria a **più gruppi** di energia dei neutroni, (**Modello a gruppi di energia**).

In essa suddiviso il percorso energetico, (fra l'energia di fissione e quella termica), in un numero discreto di intervalli, si scrive il bilancio neutronico per ognuno di tali intervalli, considerando quindi che la popolazione neutronica sia suddivisa in intervalli monoenergetici discreti e nell'ipotesi che dopo un numero di urti pari a quello medio

per abbassare la loro energia fino a quella del gruppo successivo, vengano istantaneamente trasferiti al gruppo successivo stesso.

Il termine di sorgente coincide con la **densità di rallentamento**, (q), ovvero con il numero di neutroni per unità di volume e di tempo trasferiti nell'intervallo energetico in esame.

Il Modello a gruppi di energia risulta di crescente precisione all'aumentare del numero di gruppi e comporta tuttavia la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali di più variabili, (improponibili in assenza di elaboratori, assenti all'inizio dell'era nucleare).

Teoria della Diffusione.

Una prima approssimazione della teoria generale, (Modello a gruppi), è il modello semplificato a **un solo gruppo di energia**, indicato come **Teoria della Diffusione**.

Nel modello a **un solo gruppo di energia**, si considera il bilancio all'energia termica, ($E = E_{th}$), ove pertanto la **sorgente** o densità di rallentamento consiste nel numero di neutroni per unità di volume e di tempo che giungono all'energia termica.

L'equazione generale di bilancio neutronico per unità di volume:

$$\text{Produzione} - \text{Assorbimento} - \text{Fuga} = \frac{\delta n}{\delta t} = \frac{1}{v} \frac{\delta F}{\delta t},$$

con funzioni dipendenti dal vettore di posizione geometrica, (r), dall'energia e dal tempo, si riduce in condizioni **stazionarie** o di **criticità**, a: **Produzione - Assorbimento - Fuga = 0**.

Assorbimento.

Il termine di **assorbimento** vale evidentemente: $S_c F$, ovvero:

$$\text{Assorbimento} = S_c F.$$

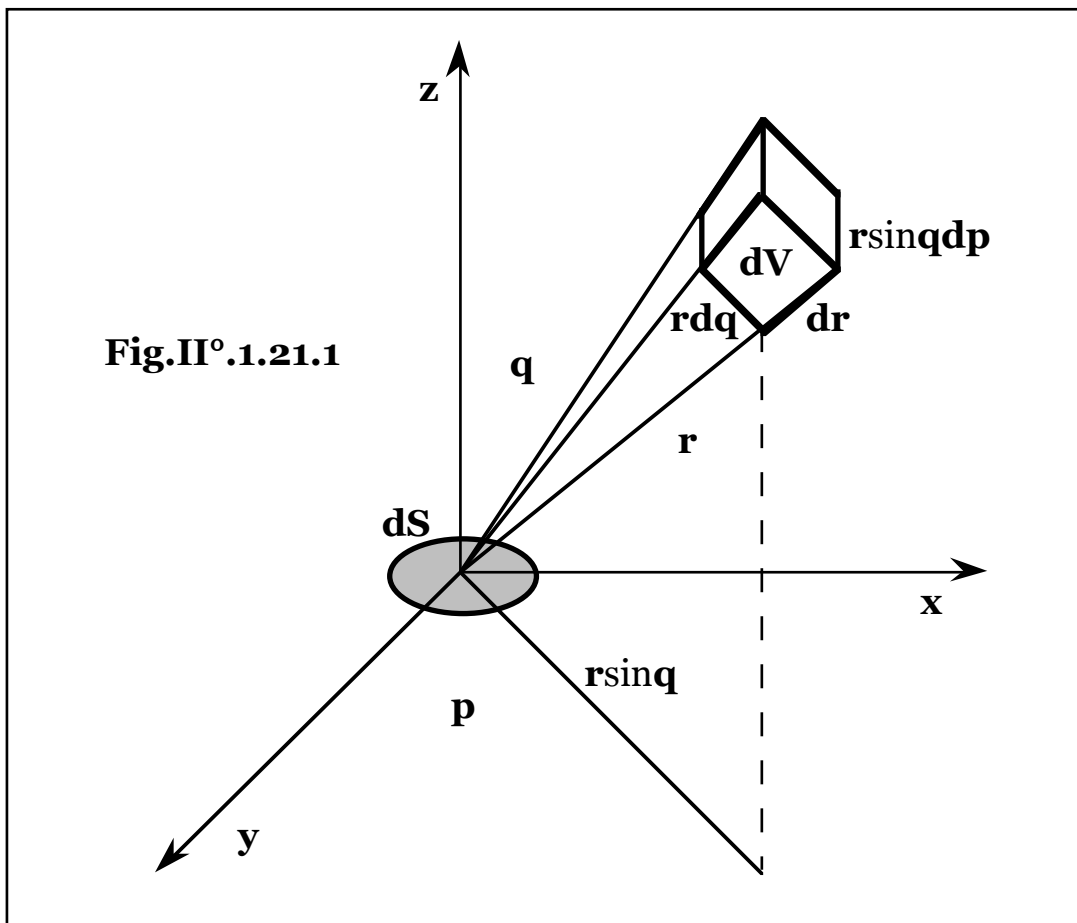
Fuga.

Assimilando la migrazione di una corrente di neutroni monoenergetici con distribuzione angolare isotropa di velocità e per collisione a simmetria sferica a quello di una specie diffondente, ogni area infinitesima dS posta sul piano xy , (**Fig.II°.1.21.1**), è attraversata da una densità di corrente neutronica netta, pari al contributo proveniente dal semispazio inferiore, (direzione $+z$), meno il contributo proveniente dal semispazio superiore, (direzione $-z$).

Dal semispazio superiore l'area dS riceve da ogni volume infinitesimo posto alla distanza r , $dV = (r \sin \theta dr d\theta d\phi)$, (in coordinate sferiche: r, θ, ϕ ,

p), un contributo alla densità di corrente neutronica pari al numero di neutroni che collidono: $\mathbf{S_s F dV}$, per l'angolo solido frazionario sotto cui vede il volume: $\frac{\cos \mathbf{q}}{4\pi r^2}$, e per il coefficiente di attenuazione della corrente: $\mathbf{e^{-S_s r}}$, (la sezione d'urto macroscopica $\mathbf{S_t}$ include sia i contributi di collisione che di assorbimento: $\mathbf{S_t = S_s + S_a}$, mentre per mezzi poco assorbenti, può ritenersi: $\mathbf{S_t \approx S_s}$):

$$- \mathbf{S_s F(r \sin q dp \, rdq \, dr)(\cos q \, dS/4\pi r^2)e^{-S_s r}}.$$



Il termine $\mathbf{e^{-S_s r}}$, rende trascurabile il contributo alla densità di corrente oltre due-tre cammini liberi medi dalla superficie, ($\mathbf{e^{-3} \approx 5\%}$), per cui appare lecito approssimare l'espressione del flusso con lo sviluppo in serie della funzione troncato al primo termine, (o al secondo in quanto i contributi dei termini del secondo ordine alle correnti si elidono a vicenda).

Il flusso nel volume infinitesimo \mathbf{dV} , risulta quindi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \approx \mathbf{F}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_0 \mathbf{y} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \mathbf{z}.$$

Il contributo alla densità di corrente in direzione negativa, per unità di superficie, si ottiene integrando \mathbf{r} fra zero e infinito, \mathbf{p} fra zero e 2π , e \mathbf{q} fra zero e $\pi/2$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathbf{S}_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{r} = \\ & = -\frac{\mathbf{S}_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\mathbf{F}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_0 \mathbf{y} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \mathbf{z} \right] e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Poichè le variabili cartesiane espresse in coordinate sferiche risultano: $\mathbf{x} = \mathbf{r} \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{p}$; $\mathbf{y} = \mathbf{r} \sin \mathbf{q} \sin \mathbf{p}$; $\mathbf{z} = \mathbf{r} \cos \mathbf{q}$, il secondo e terzo termine dell'integrale, (relativi alle coordinate \mathbf{x} e \mathbf{y}), contengono, circa la coordinata \mathbf{p} , solo i fattori rispettivamente $\cos \mathbf{p}$ e $\sin \mathbf{p}$, che integrati fra zero e 2π , si annullano.

Risultano effettivi solo il primo e il quarto termine e il contributo vale:

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathbf{S}_s \mathbf{F}_0}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{r} - \\ & -\frac{\mathbf{S}_s}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{r} e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} \cos^2 \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{r} = \\ & = -\frac{\mathbf{S}_s \mathbf{F}_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} d\mathbf{r} \int_0^{2\pi} d\mathbf{p} \int_0^{\pi/2} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} - \\ & -\frac{\mathbf{S}_s}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \int_0^\infty \mathbf{r} e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} d\mathbf{r} \int_0^{2\pi} d\mathbf{p} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}, \end{aligned}$$

$$\text{con: } \int_0^{2\pi} d\mathbf{p} = 2\pi; \quad \int_0^\infty e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{1}{\mathbf{S}_s}; \quad \int_0^\infty \mathbf{r} e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{1}{\mathbf{S}_s^2};$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = - \int_1^0 \cos \mathbf{q} d(\cos \mathbf{q}) = \frac{1}{2};$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = - \int_1^0 \cos^2 \mathbf{q} d(\cos \mathbf{q}) = \frac{1}{3},$$

$$\text{da cui il contributo: } -\frac{\mathbf{F}_0}{4} - \frac{1}{6\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0.$$

Il contributo alla densità di corrente neutronica proveniente dal semispazio inferiore, (direzione positiva), risulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{S}_s \mathbf{F}_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} \int_0^{2\pi} d\mathbf{p} \int_\pi^{\pi/2} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{r} + \\ & + \frac{\mathbf{S}_s}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \int_0^\infty \mathbf{r} e^{-\mathbf{S}_s \mathbf{r}} d\mathbf{r} \int_0^{2\pi} d\mathbf{p} \int_\pi^{\pi/2} \cos^2 \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}, \end{aligned}$$

con:
$$\int_{\pi}^{\pi/2} \cos q \sin q dq = - \int_{-1}^0 \cos q d(\cos q) = \frac{1}{2};$$
$$\int_{\pi}^{\pi/2} \cos^2 q \sin q dq = - \int_{-1}^0 \cos^2 q d(\cos q) = - \frac{1}{3},$$

da cui il contributo:
$$\frac{\mathbf{F}_0}{4} - \frac{1}{6\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0.$$

Sommando i due contributi, si ottiene:

$$\mathbf{J}_z = - \frac{\mathbf{F}_0}{4} - \frac{1}{6\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 + \left[\frac{\mathbf{F}_0}{4} - \frac{1}{6\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \right] = - \frac{1}{3\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0.$$

Analogamente per una superficie posta nei piani **xz** e **zy**, si ottiene:

$$\mathbf{J}_y = - \frac{1}{3\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_0; \quad \mathbf{J}_x = - \frac{1}{3\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0.$$

Per una superficie comunque orientata, quindi, la densità di corrente, risulta una grandezza vettoriale:
$$\underline{\mathbf{J}} = - \frac{1}{3\mathbf{S}_s} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right) \mathbf{k} \right],$$

ovvero: $\underline{\mathbf{J}} = - \frac{1}{3\mathbf{S}_s} \text{grad } \mathbf{F}.$

La relazione risulta la legge della diffusione, (1° Legge di Fick), ovvero vettore densità di corrente neutronica, ($\underline{\mathbf{J}}$), pari al gradiente della densità neutronica: $\underline{\mathbf{J}} = - \mathbf{D}_0 \text{grad } \mathbf{n}$, (\mathbf{D}_0 coefficiente di diffusione), in quanto essendo: $\mathbf{F} = \mathbf{n}v$, si ha: $\underline{\mathbf{J}} = - \mathbf{D}_0/v \text{grad } \mathbf{F} = - \mathbf{D} \text{grad } \mathbf{F}$, e fornisce il valore del coefficiente di diffusione: $\mathbf{D} = 1/3\mathbf{S}_s = \mathbf{l}_{ms}/3$, e quindi: $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}v = v/3\mathbf{S}_s = v \mathbf{l}_{ms}/3$.

In condizioni stazionarie la divergenza della densità di corrente neutronica:

$$\text{div} \underline{\mathbf{J}} = \text{div}(- \mathbf{D}_0 \text{grad } \mathbf{n}) = - \mathbf{D}_0 \nabla^2 \mathbf{n} = \text{div}(- \mathbf{D} \text{grad } \mathbf{F}) = - \mathbf{D} \nabla^2 \mathbf{F},$$

rappresenta quindi il contributo di fuga dall'unità di volume considerata: $\mathbf{Fuga} = - \mathbf{D}_0 \nabla^2 \mathbf{n} = - \mathbf{D} \nabla^2 \mathbf{F}.$

Nella teoria più rigorosa, (trasporto), il valore del coefficiente di diffusione, va corretto del termine: $1/(1 - \cos q)$, con $\cos q$, angolo medio di collisione, (nullo per collisione isotropa, sufficientemente valida per $A > 60$, mentre con nuclei leggeri i neutroni hanno tendenza a mantenere

la direzione originaria):
$$\mathbf{D} = \frac{1}{3\mathbf{S}_s(1 - \cos q)} = \frac{\mathbf{l}_{ms}}{3(1 - \cos q)} = \frac{\mathbf{l}_{mt}}{3},$$

con: $\mathbf{l}_{mt} = \frac{\mathbf{l}_{ms}}{1 - \cos q}$, cammino libero medio per il trasporto.

Produzione o Sorgente.

Indicando con $\mathbf{F}(\mathbf{E}')$ il flusso neutronico all'energia \mathbf{E}' , per unità di energia, il numero di collisioni di neutroni aventi energia \mathbf{E}' , nell'intervallo $d\mathbf{E}'$ vale: $\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')d\mathbf{E}'$, [il parametro $\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')$, pari al numero di collisioni per unità di volume di tempo e di energia, è indicato come densità di collisione], e qualora l'energia dopo la collisione possa essere qualunque fra \mathbf{E}' e zero, (moderatori contenenti idrogeno: $\mathbf{A} = 1$), la frazione compresa nell'intervallo $d\mathbf{E}$, vale:

$\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')d\mathbf{E}' \frac{d\mathbf{E}}{\mathbf{E}'}$, e quindi il numero totale di neutroni portati

nell'intervallo $d\mathbf{E}$, risulta: $d\mathbf{E} \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}_0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')}{\mathbf{E}'} d\mathbf{E}'$.

I neutroni che giungono nell'intervallo $d\mathbf{E}$, dall'intervallo $d\mathbf{E}'$, per trovarvisi hanno subito precedenti collisioni. A questi vanno pertanto aggiunti quelli che giungono nell'intervallo $d\mathbf{E}$ come risultato della prima collisione diretta dall'energia di fissione \mathbf{E}_0 .

Indicando con \mathbf{Q} , la sorgente di neutroni di fissione per unità di tempo e di volume, tale risulta il tasso delle prime collisioni, (la prima collisione avviene comunque all'energia di fissione), da cui la frazione trasferita nell'intervallo $d\mathbf{E}$: $\mathbf{Q}d\mathbf{E}/\mathbf{E}_0$.

Il contributo totale vale quindi: $\left(\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{E}_0} + \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}_0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')}{\mathbf{E}'} d\mathbf{E}' \right) d\mathbf{E}$.

In condizioni stazionarie lo stesso deve essere il numero di neutroni che lascia l'intervallo $d\mathbf{E}$, pari a: $\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) d\mathbf{E}$, ovvero:

$$\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{E}_0} + \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}_0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')}{\mathbf{E}'} d\mathbf{E}',$$

e differenziando: $\frac{d}{d\mathbf{E}} \mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) = - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E})}{\mathbf{E}}$, da cui:

$$\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) = \text{costante}/\mathbf{E}.$$

In condizioni stazionarie, per: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, il numero di collisioni per unità di energia vale: $\mathbf{F}(\mathbf{E}_0)\mathbf{S}_s(\mathbf{E}_0) = \mathbf{Q}/\mathbf{E}_0$, come risulta anche dalla relazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{E}_0} + \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}_0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')}{\mathbf{E}'} d\mathbf{E}', \text{ per: } \mathbf{E} = \mathbf{E}_0.$$

Si ottiene quindi: $\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) = \mathbf{Q}/\mathbf{E}$, ovvero: $\mathbf{F}(\mathbf{E}) = \mathbf{Q}/\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}$.

La sorgente di neutroni a energia \mathbf{E} , o "densità di rallentamento", $\mathbf{q}(\mathbf{E})$, ovvero il numero di neutroni che scendono al di sotto dell'energia \mathbf{E} per

unità di tempo e di volume, in assenza di perdite e di assorbimento, risulta costante e pari a **Q**, da cui: **F(E) = q/S_s(E)E**.

Infatti il numero di collisioni che dall'intervallo energetico **dE'**, (**E' > E**), portano il neutrone al di sotto dell'energia **E**, vale: **F(E')S_s(E')dE' $\frac{E}{E'}$** , e

globalmente: **E $\int_E^{E_0} \frac{F(E')S_s(E')}{E'} dE'$** , da cui aggiungendo il contributo della prima collisione, (**QE/E₀**), si ottiene la densità di rallentamento:

$$q(E) = \frac{QE}{E_0} + E \int_E^{E_0} \frac{F(E')S_s(E')}{E'} dE',$$

da cui essendo: **F(E')S_s(E') = Q/E'**, si ottiene:

$$q(E) = \frac{QE}{E_0} + QE \int_E^{E_0} \frac{1}{E'^2} dE' = \frac{QE}{E_0} - QE \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E} \right) = Q.$$

In caso di moderatori a numero atomico: **A > 1**, (singoli o misti), i neutroni non possono perdere tutta la loro energia in un solo urto e pertanto l'energia di un neutrone di energia **E'** dopo la collisione è

compresa nell'intervallo: **E' ÷ aE'**, con: **a = $\frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$** , (**0 < a < 1**).

Nell'intervallo energetico: **E₀ ÷ aE₀**, il modello di calcolo coincide con il caso in cui si abbia: **A = 1**, e si ottiene quindi:

$$F(E)S_s(E) = \frac{Q}{E_0(1-a)} + \int_E^{E_0} F(E')S_s(E') \frac{dE'}{E'(1-a)},$$

e differenziando: **$\frac{d}{dE} F(E)S_s(E) = -\frac{F(E)S_s(E)}{E(1-a)}$** , da cui:

F(E)S_s(E) = - $\frac{\text{costante}}{E^{1-a}}$, con: **F(E₀)S_s(E₀) = - $\frac{Q}{E_0(1-a)}$** , e quindi:

$$F(E)S_s(E) = Q \frac{\frac{a}{(E_0)^{1-a}}}{(1-a)} \frac{1}{\frac{1}{E^{1-a}}}.$$

Per energie inferiori ad **aE₀**, poichè la massima energia che un neutrone può avere prima di essere trasferito nell'intervallo elementare **dE**, è **E/a**, il contributo è relativo all'intervallo di provenienza: **E/a ÷ E**,

e vale quindi: **dE $\int_E^{E/a} \frac{F(E')S_s(E')}{E'(1-a)} dE'$** , da cui:

$$\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E}) = \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}/a} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{E}')\mathbf{S}_s(\mathbf{E}')}{\mathbf{E}'(1-a)} d\mathbf{E}'.$$

L'equazione può essere risolta in maniera approssimata, (di crescente precisione al diminuire dell'energia: $\mathbf{E} \ll a\mathbf{E}_0$), e in tal caso risulta:

$$\mathbf{F}(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{q}}{z\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}}, \text{ ovvero: } \mathbf{q} = z\mathbf{F}(\mathbf{E})\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}.$$

L'equazione di continuità per la densità neutronica, ovvero variazione di concentrazione di neutroni pari alle fughe, (II° Legge di Fick):

$$\frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{D}_0 \nabla^2 \mathbf{n}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t}),$$

ovvero:
$$\frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{E})} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{D}_0}{\mathbf{v}(\mathbf{E})} \nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t}) = \mathbf{D} \nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t}),$$

da cui introducendo l'espressione della densità di rallentamento:

$$\frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{E})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left\{ \frac{\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{z\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}} \right\} = \mathbf{D} \nabla^2 \left\{ \frac{\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{z\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}} \right\},$$

e non essendo la derivata, (temporale), e il Laplaciano, (spaziale), relativi alla variabile energia:

$$\frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{E})z\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{D}}{z\mathbf{S}_s(\mathbf{E})\mathbf{E}} \nabla^2 \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t}),$$

e quindi, (per ogni valore dell'energia):
$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{D}\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t}).$$

L'energia dei neutroni tuttavia, varia nel tempo secondo la relazione:

$$-\frac{d\mathbf{E}}{d\mathbf{t}} = z\mathbf{v}\mathbf{S}_s\mathbf{E} = \frac{z\mathbf{v}\mathbf{E}}{l_{ms}}, \text{ pertanto la variabile temporale può essere}$$

sostituita con l'energia tramite la relazione:
$$d\mathbf{t} = -\frac{d\mathbf{E}}{z\mathbf{v}\mathbf{S}_s\mathbf{E}} = -\frac{l_{ms}}{z\mathbf{v}\mathbf{E}} d\mathbf{E},$$

da cui:
$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = -z\mathbf{v}\mathbf{S}_s\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}},$$
 o in generale, esprimendo la variazione temporale della densità di rallentamento come:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{t}},$$

si ottiene comunque:
$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = -z\mathbf{v}\mathbf{S}_s\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}.$$

La relazione di bilancio spazio temporale della densità di rallentamento, diviene quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = -z\mathbf{v}\mathbf{S}_s\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{D}\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}),$$

ovvero:
$$\nabla^2 \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E}) = - \frac{\mathbf{zS_s E}}{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = -3\mathbf{zS_s^2 E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}},$$

che esprime il pareggio fra i neutroni che per collisioni entrano in un intervallo energetico e quelli che l'abbandonano per fuga, (in regime stazionario, o alla criticità lo spettro energetico di valori: $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{E})$, è costante nel tempo).

Sostituendo alla variabile energia una nuova variabile, ($\mathbf{e_f}$), indicata

come età di Fermi, e definita come: $\mathbf{e_f(E)} = \frac{\mathbf{1_{ms}^2}}{\mathbf{3z}} \ln \frac{\mathbf{E_o}}{\mathbf{E}}$, nulla per

energia di fissione, ($\mathbf{E_o}$), si ottiene:
$$\frac{\mathbf{de_f(E)}}{\mathbf{dE}} = - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3zS_s^2 E}} = - \frac{\mathbf{1_{ms}^2}}{\mathbf{3zE}}.$$

Esprimendo la variazione della densità di rallentamento con l'energia

come:
$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f})}{\partial \mathbf{e_f}} \frac{\partial \mathbf{e_f(E)}}{\partial \mathbf{E}},$$
 si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{q} &= -3\mathbf{zS_s^2 E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = -3\mathbf{zS_s^2 E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f})}{\partial \mathbf{e_f}} \frac{\partial \mathbf{e_f(E)}}{\partial \mathbf{E}} = \\ &= \mathbf{3zS_s^2 E} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f})}{\partial \mathbf{e_f}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3zS_s^2 E}} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f})}{\partial \mathbf{e_f}}, \text{ ovvero: } \nabla^2 \mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f})}{\partial \mathbf{e_f}}, \text{ con} \end{aligned}$$

costante di proporzionalità unitaria.

Secondo tale simbologia biologica la "nascita" di un neutrone a energia $\mathbf{E_o}$, coincide con l'età zero, l'"invecchiamento", con la sua progressiva perdita di energia, o rallentamento, fino all'energia termica $\mathbf{E_{th}}$, (età $\mathbf{e_{th}}$), e infine la morte per assorbimento da parte di un qualche nucleo.

Il termine di **Produzione**, o **Sorgente**, (densità di rallentamento all'energia termica, intesa come numero di neutroni per unità di volume e di tempo che giungono all'energia termica), risulta quindi la soluzione

dell'equazione:
$$\nabla^2 \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{e_f})}{\partial \mathbf{e_f}},$$
 ("equazione dell'età").

L'artificio del "buckling".

In un reattore di dimensioni finite, (a meno di disomogeneità neutroniche puntuali per l'alternarsi di barre di combustibile, di controllo, moderatore, organi strutturali, che portano a disomogeneità di ogni grandezza), la distribuzione spaziale della densità di rallentamento deve necessariamente mostrare, per ogni valore dell'energia, (o dell'età), valore massimo al centro, simmetria parallelepipedica, cilindrica o sferica a seconda della geometria del

sistema e annullamento ai confini, mentre risultando crescente dal centro alle pareti l'effetto di fuga, il modulo della pendenza risulta crescente dal centro alla periferia, senza flessi.

Al diminuire dell'energia, (o all'aumentare dell'età e quindi del tempo di rallentamento), risultando crescente il contributo di fuga, la densità di rallentamento si riduce progressivamente fino a tendere al valore termico, (minimo), in ogni punto, al tendere al valore termico, ($\mathbf{E_{th}}$), dell'energia, (o dell'età, $\mathbf{e_{th}}$), continuando comunque a mostrare le stesse caratteristiche di zeri, massimo e simmetrie.

Posta l'origine del sistema di riferimento al centro del reattore e detta $\mathbf{r_0}$ la distanza di confine, risulta quindi:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q(r, e_f)}}{\partial \mathbf{r^2}} < 0, \forall \mathbf{r, \forall e_f}; \left[\frac{\partial \mathbf{q(r, e_f)}}{\partial \mathbf{r}} \right]_{\mathbf{r=0}} = 0, \forall \mathbf{e_f}; \mathbf{q(r_0, e_f)} = 0, \forall \mathbf{e_f}.$$

L'espressione analitica più semplice della densità di rallentamento che soddisfa tali condizioni, è una formula rappresentata dal prodotto di una funzione spaziale della suddetta forma con, a fattore, un termine moltiplicativo funzione dell'energia, (o dell'età), monotono descescente da un valore finito a un minimo, per energia variabile da quella di fissione a quella termica, (o da età nulla a termica).

L'artificio del "buckling" consiste proprio nell'ipotizzare che la densità di rallentamento, (proporzionale al flusso), in condizioni stazionarie:

$\mathbf{q(r, e_f)}$, sia esprimibile in forma monomia come prodotto di due fattori funzionali ognuno dipendente da una sola variabile: coordinate spaziali, $[\mathbf{R(r)}]$, ed età, (ovvero energia e caratteristiche dei materiali, $[\mathbf{T(e_f)}]$: $\mathbf{q(r, e_f)} = \mathbf{R(r) T(e_f)}$.

L'equazione dell'età diviene quindi: $\mathbf{T(e_f) \nabla^2 \bar{R(r)} = \bar{R(r)} \frac{\delta T(e_f)}{\delta e_f}}$,

ovvero:
$$\frac{\nabla^2 \bar{R(r)}}{\bar{R(r)}} = \frac{1}{T(e_f)} \frac{\delta T(e_f)}{\delta e_f} (= -\mathbf{B^2}).$$

Infatti in tali ipotesi, l'equazione appare come l'identità di due funzioni di variabili diverse, che non possono quindi dipendere da alcuna delle rispettive variabili indipendenti e pertanto, in assenza di altre possibili variabili, necessariamente coincidenti con una costante, ($-\mathbf{B^2}$).

Si ottengono pertanto due equazioni, ovvero i due membri dell'equazione rispettivamente uguali alla costante, ($-\mathbf{B^2}$):

$$\frac{\nabla^2 \bar{R(r)}}{\bar{R(r)}} = -\mathbf{B^2}; \quad \frac{1}{T(e_f)} \frac{\delta T(e_f)}{\delta e_f} = -\mathbf{B^2}.$$

L'espressione della costante, $(-B^2)$, è tale da fissarne comunque un valore negativo. Infatti la parte spaziale della densità di rallentamento per qualunque geometria, $[R(r)]$, risulta massima al centro e tende a zero in prossimità del confine del reattore, per cui la sua concavità è negativa, mentre la funzione ha comunque segno positivo. La costante rapporto fra la somma delle derivate seconde della funzione, (Laplaciano della funzione), e la funzione stessa: $(\nabla^2 R(r)/R(r) = -B^2)$, deve pertanto avere segno negativo e per il suo significato fisico viene detta "**buckling**", (rigonfiamento).

Parimenti nella parte dipendente dall'energia dell'equazione, al crescere dell'età, (ovvero a energie decrescenti dei neutroni), per effetto delle fughe, la densità di rallentamento tende a decrescere, (la probabilità di un neutrone di divenire sempre più "vecchio" senza sfuggire è decrescente), da cui il segno negativo della pendenza della funzione $T(e_f)$, che ha invece segno positivo, da cui il segno negativo del rapporto fra la derivata e la funzione stessa.

Dalla parte dipendente dall'età, si ottiene:

$T(e_f) = \text{costante } e^{-B^2 e_f}$ e quindi: $q(r, e_f) = \text{costante } R(r) e^{-B^2 e_f}$.

A età nulla, ($E = E_0$, $e_f = 0$), la densità di rallentamento coincide con il numero di neutroni veloci generati per unità di tempo e di volume, pari alla frazione di utilizzazione da parte del combustibile, (f), della densità totale di reazione termica, [flusso termico, $F(r)$, per sezione d'urto macroscopica globale, (S_c)], per la fertilità, (h), e per il fattore di fissione veloce, (e), ovvero: $f S_c F(r) h e = (k_{00}/p) S_c F(r)$.

Si ottiene quindi: $q(r, 0) = \text{costante} \times R(r) = (k_{00}/p) S_c F(r)$, da cui:

$$q(r, e_f) = (k_{00}/p) S_c F(r) e^{-B^2 e_f}.$$

In assenza di fughe, pertanto, la relazione porge una densità di rallentamento all'energia termica pari a: $(k_{00}/p) S_c F(r)$, ovvero i neutroni assorbiti, [$S_c F(r)$], ne fornirebbero nella generazione successiva: $k_{00}/p = e f h$, definizione del fattore di moltiplicazione infinito che apparirebbe privo del termine di trasparenza, (p).

La trattazione riportata, infatti, è valida nell'ipotesi di calcolo di mezzo non assorbente.

In realtà il flusso, durante la moderazione, si riduce, oltre che per le fughe, ($e^{-B^2 e_f}$), anche per effetto delle catture parassite e il termine di sorgente rispetto alla densità di rallentamento in assenza di assorbimento, va quindi ridotto, (con ipotesi sufficientemente

approssimata valida in caso di debole assorbimento), del solo fattore di trasparenza, (**p**): **Sorgente** = **p q(r, e_f)**.

Nella teoria a un solo gruppo, (termico), di energia, il termine di **sorgente** nell'equazione di diffusione in condizioni di criticità, (corrispondente alla densità di rallentamento a energia termica), risulta

quindi: **Sorgente** = **p q(r, e_{th})** = **k_{oo}S_cF(r) e^{-B²e_{th}}**.

L'equazione di bilancio critico all'energia termica, diviene quindi:

$$D \nabla^2 F(r) - S_c F(r) + k_{oo} S_c F(r) e^{-B^2 e_{th}} = 0.$$

Essendo: **q(r, e_f)** = **R(r)T(e_f)** = **(k_{oo}/p)S_cF(r) e^{-B²e_f}**, il flusso termico:

F(r), (ovvero per **e_f** = **e_{th}**), vale: **F(r)** = **{T(e_{th}) p e^{B²e_{th}}/(k_{oo}S_c)}****R(r)**, ovvero proporzionale alla parte spaziale della densità di rallentamento, [**R(r)**], e deve quindi soddisfare la stessa equazione:

$$\nabla^2 F(r)/F(r) = -B^2, \text{ da cui: } \nabla^2 F(r) = -B^2 F(r).$$

L'equazione di bilancio critico diviene quindi:

$$-D B^2 F(r) + k_{oo} S_c F(r) e^{-B^2 e_{th}} - S_c F(r) = 0,$$

ovvero: **-D B² + (k_{oo} e^{-B²e_{th}} - 1) S_c = 0**.

Indicando il rapporto: **D/S_c = l_{ms}l_{mc}/3 = 1/(3S_sS_c)**, come **L²**, (detto area di diffusione e **L** lunghezza di diffusione), si ottiene pertanto:

$$-L^2 B^2 + (k_{oo} e^{-B^2 e_{th}} - 1) = 0, \text{ ovvero: } k_{oo} \frac{e^{-B^2 e_{th}}}{1 + B^2 L^2} = 1.$$

Essendo il flusso neutronico in funzione dell'energia, proporzionale alla densità di rallentamento, ovvero variabile secondo il fattore:

e^{-B²e_f}(E) = **e^{-B² \frac{l_{ms}^2}{3z} \ln \frac{E_o}{E}}**, tale risulta la probabilità, (**p_r**), di un neutrone di energia originaria **E_o**, (età zero), di giungere all'età **e_f(E)**,

(ovvero all'energia **E**), senza sfuggire dal reattore: **p_r(E) = e^{-B²e_f}(E)**,

da cui essendo: **E_o ~ 2 MeV**, **E_{th} = 0,025 eV**, l'età termica, risulta:

$$e_f(E_{th}) = e_{th} = \frac{l_{ms}^2}{3z} \ln \frac{E_o}{E_{th}} \approx 6 \frac{l_{ms}^2}{z},$$

e la probabilità di un neutrone di divenire termico, ovvero di giungere

all'equilibrio con l'ambiente: **p_r(E_{th}) = e^{-B²e_{th}} = e^{-6B² \frac{l_{ms}^2}{z}}}**.

Dalla relazione di criticità, tenuto conto dell'espressione della probabilità di non sfuggire durante il rallentamento: $p_r = e^{-B^2 e_{th}}$, si ottiene che il termine: $1/(1 + B^2 L^2)$, rappresenta la probabilità di non sfuggire durante la diffusione: $p_d = \frac{1}{1 + B^2 L^2}$.

Infatti essendo il rapporto: **fuga/assorbimento termico**, pari a:

- $D \nabla^2 F / (S_c F) = DB^2 / S_c = L^2 B^2$, la probabilità di non sfuggire durante la diffusione risulta:

$$p_d = \frac{\text{assorbimento termico}}{\text{assorbimento termico} + \text{fuga}} = \frac{1}{1 + \frac{\text{fuga}}{\text{assorbimento termico}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + L^2 B^2} = \frac{1}{1 + B^2 \frac{l_{ms} l_{mc}}{3}} = \frac{1}{1 + B^2 \frac{1}{3 S_{ms} S_{mc}}}.$$

La condizione di criticità: $k_{eff} = k_{oo} \frac{e^{-B^2 e_{th}}}{1 + B^2 L^2} = 1$, per: $B^2 e_{th} \ll 1$ (come risulta nei casi reali), può approssimarsi come:

$$k_{oo} \frac{e^{-B^2 e_{th}}}{1 + B^2 L^2} \approx k_{oo} \frac{1 - B^2 e_{th}}{1 + B^2 L^2} \approx \frac{k_{oo}}{\left(1 + B^2 e_{th}\right) \left(1 + B^2 L^2\right)} =$$

$$= \frac{k_{oo}}{1 + B^2 \left(L^2 + e_{th}\right) + B^4 L^2 e_{th}} \approx \frac{k_{oo}}{1 + B^2 \left(L^2 + e_{th}\right)} = \frac{k_{oo}}{1 + B^2 M^2} = 1,$$

da cui: $B^2 = \frac{k_{oo} - 1}{M^2}$, avendo posto: $M^2 = (L^2 + e_{th})$, indicata come

“area di migrazione” e M “lunghezza di migrazione”.

Il valore della costante, radice dell'equazione, risulta funzione delle sole caratteristiche strutturali e viene quindi indicata con pedice **m**, (B_m), e detta "**buckling dei materiali**".

Infatti il risultato deriva dall'equazione di bilancio critico:

$$- D B^2 F(r) + k_{oo} S_c F(r) e^{-B^2 e_{th}} - S_c F(r) = 0,$$

in cui la sola parte dipendente dalla geometria, $[F(r)]$, si elide, fornendo una condizione valida in ogni punto del reattore e poiché è fissata l'energia, (termica), ne risulta una relazione dipendente solo dalle caratteristiche dei materiali.

Risolvendo la parte geometrica dell'equazione per il flusso in condizioni di criticità: $\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})/\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{B}^2$, nel rispetto delle caratteristiche di simmetria delle diverse geometrie, si ottiene la soluzione per il flusso contenente costanti di integrazione e la grandezza \mathbf{B} .

Imponendo le condizioni di significato fisico, (valori finiti e positivi), e al contorno, (annullamento del flusso neutronico alle estremità del reattore), la radice \mathbf{B}^2 dell'equazione, per ogni geometria costruttiva, ovvero il valore per cui la soluzione abbia significato fisico e le dimensioni del sistema siano compatibili con l'ipotesi di base di stazionarietà del fenomeno, viene indicata con pedice \mathbf{g} , (\mathbf{B}_g), a indicarne la dipendenza dalle sole coordinate geometriche e detta "**buckling geometrico**".

Per reattore **parallelepipedo rettangolo**, (dimensioni: \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}), in coordinate ortogonali e origine al centro del reattore, l'equazione:

$$\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})/\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{B}^2,$$

$$\text{diviene: } \frac{\delta^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\delta \mathbf{x}^2} + \frac{\delta^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\delta \mathbf{y}^2} + \frac{\delta^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\delta \mathbf{z}^2} + \mathbf{B}^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0.$$

Per ogni proiezione sui piani cartesiani della funzione: $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, devono evidentemente mantenersi valide le caratteristiche geometriche della funzione globale, (massimo al centro, concavità costantemente negativa con pendenza crescente in modulo dal centro verso i confini ove la funzione si annulla), con riduzione della curva al crescere della rimanente dimensione fino all'annullamento all'estremità per ogni valore delle altre due dimensioni.

Tali condizioni si ottengono supponendo lecita la separazione delle variabili in fattori di medesima simmetria qualitativa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{Y}(\mathbf{y}) \mathbf{Z}(\mathbf{z}).$$

Si ottiene, quindi:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{y})\mathbf{Z}(\mathbf{z}) \frac{\delta^2 \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}^2} + \mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{z}) \frac{\delta^2 \mathbf{Y}(\mathbf{y})}{\delta \mathbf{y}^2} + \mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{y}) \frac{\delta^2 \mathbf{Z}(\mathbf{z})}{\delta \mathbf{z}^2} + \mathbf{B}^2 \mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{y})\mathbf{Z}(\mathbf{z}) = 0$$

$$\text{ovvero: } \frac{1}{\mathbf{X}(\mathbf{x})} \frac{\delta^2 \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}^2} + \frac{1}{\mathbf{Y}(\mathbf{y})} \frac{\delta^2 \mathbf{Y}(\mathbf{y})}{\delta \mathbf{y}^2} + \frac{1}{\mathbf{Z}(\mathbf{z})} \frac{\delta^2 \mathbf{Z}(\mathbf{z})}{\delta \mathbf{z}^2} + \mathbf{B}^2 = 0.$$

Affinchè la somma di più funzioni di variabili indipendenti diverse, risulti pari a una costante, ogni funzione deve parimenti essere pari a una costante:

$$\frac{1}{\mathbf{X}(\mathbf{x})} \frac{\delta^2 \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}^2} + \mathbf{B}_x^2 = 0; \quad \frac{1}{\mathbf{Y}(\mathbf{y})} \frac{\delta^2 \mathbf{Y}(\mathbf{y})}{\delta \mathbf{y}^2} + \mathbf{B}_y^2 = 0; \quad \frac{1}{\mathbf{Z}(\mathbf{z})} \frac{\delta^2 \mathbf{Z}(\mathbf{z})}{\delta \mathbf{z}^2} + \mathbf{B}_z^2 = 0,$$

con: $B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B^2$.

Dalla relazione: $\frac{1}{X(x)} \frac{\delta^2 X(x)}{\delta x^2} + B_x^2 = 0$, si ottiene:

$$X(x) = c_1 \cos B_x x + c_2 \sin B_x x.$$

Imponendo la condizione di simmetria e di massimo valore del flusso al centro del reattore: $dX(x)/dx = 0$, per $x = 0$, si ha: $c_2 = 0$, e quindi: $X(x) = c_1 \cos B_x x$, mentre imponendo l'annullamento del flusso all'estremità del reattore: $X(\pm a/2) = c_1 \cos B_x a/2 = 0$, si ha:

$$B_x a/2 = \pi/2, \text{ ovvero: } B_x = \pi/a, \text{ da cui: } X(x) = c_1 \cos \pi x/a.$$

Analogamente lungo le restanti coordinate, si ottiene:

$$B_y = \pi/b, \text{ da cui: } Y(y) = c_3 \cos \pi y/b;$$

$$B_z = \pi/c, \text{ da cui: } Z(z) = c_5 \cos \pi z/c,$$

e quindi: $B_g^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right);$

$$F(x, y, z) = F_{\max} \cos \pi \frac{x}{a} \cos \pi \frac{y}{b} \cos \pi \frac{z}{c}, (F_{\max} = c_1 c_3 c_5);$$

$$\frac{\bar{F}}{F_{\max}} = 0,281, \text{ mentre il volume del reattore, vale:}$$

$$V_o = abc = \left(\frac{\pi}{B_x} \right) \left(\frac{\pi}{B_y} \right) \left(\frac{\pi}{B_z} \right) = (B_x = B_y = B_z = \frac{B_g}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi^3}{\left(\frac{B_g}{\sqrt{3}} \right)^3} \approx \frac{161}{B_g^3}.$$

In caso di geometria **cubica**, ($a = b = c$), e origine degli assi al centro del reattore, si ottiene:

$$B_g^2 = \frac{3\pi^2}{a^2}; \quad F(x, y, z) = F_{\max} \cos \pi \frac{x}{a} \cos \pi \frac{y}{a} \cos \pi \frac{z}{a};$$

$$V_o = 3^{3/2} \frac{\pi^3}{B_g^3} \approx \frac{161}{B_g^3}.$$

In caso di geometria **sferica**, (raggio R), in coordinate sferiche, (r), con origine al centro del reattore, per simmetria, le derivate seconde dipendono solo dalla dimensione radiale, per cui la relazione:

$$\nabla^2 F(r)/F(r) = -B^2, \text{ diviene: } \frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} + B^2 F(r) = 0,$$

con integrale generale: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{c}_7 \frac{\sin \mathbf{B} \mathbf{r}}{\mathbf{r}} + \mathbf{c}_8 \frac{\cos \mathbf{B} \mathbf{r}}{\mathbf{r}}$.

Imponendo condizioni finite per il flusso all'origine, si ottiene:

$\mathbf{c}_8 = 0$, da cui: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{\max} \frac{\sin \mathbf{B} \mathbf{r}}{\mathbf{r}}$, mentre imponendo la condizione di

annullamento del flusso all'estremità: $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}_{\max} \frac{\sin \mathbf{B} \mathbf{R}}{\mathbf{R}} = 0$,

si ottiene: $\mathbf{B} \mathbf{R} = \pi$, e quindi:

$$\mathbf{B}_g^2 = \frac{\pi^2}{\mathbf{R}^2}; \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{\max}}{\mathbf{r}} \sin \frac{\pi \mathbf{r}}{\mathbf{R}}; \frac{\bar{\mathbf{F}}}{\mathbf{F}_{\max}} = 0,301; \mathbf{V}_0 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\pi}{\mathbf{B}_g} \right)^3 \approx \frac{130}{\mathbf{B}_g^3}.$$

In caso di geometria **cilindrica**, (raggio \mathbf{R} , altezza \mathbf{H}), in coordinate cilindriche, (\mathbf{r}, \mathbf{z}) , e centro delle coordinate al centro del reattore, imponendo le condizioni di simmetria e al contorno: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = 0$, per:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}; \mathbf{z} = \pm \mathbf{H}/2, \text{ si ottiene: } \mathbf{B}_g^2 = \frac{\pi^2}{\mathbf{H}^2} + \frac{5,784}{\mathbf{R}^2};$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{c}_9 \mathbf{J}_0 \left(2,405 \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} \right) \cos \pi \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{H}};$$

$$\mathbf{V}_0 \approx \frac{148}{\mathbf{B}_g^3}, (\mathbf{H} = 2\mathbf{R}), \text{ con } \mathbf{J}_0 \text{ funzione di Bessel di } 1^\circ \text{ specie.}$$

Il punto di annullamento del flusso non coincide esattamente con l'estremità del reattore, mantenendosi comunque un certo flusso di fuga alle pareti, per cui le dimensioni che si ottengono non sono quelle strettamente geometriche, ma comprensive della reale distanza di annullamento del flusso.

Nella teoria della diffusione, approssimazione, (un solo gruppo di energia dei neutroni), del modello rigoroso, (teoria del trasporto), la condizione di annullamento del flusso, viene corretta ipotizzando che il flusso neutronico al di fuori del sistema vari linearmente con pendenza costante e uguale al valore relativo alla superficie di separazione, (pari in realtà a quello presente in sezioni non troppo vicine al confine e quindi non influenzate dai fenomeni di estremità).

Indicando con \mathbf{z} la coordinata normale alla superficie di confine con origine sulla superficie stessa e positiva verso l'esterno, il contributo entrante della densità di corrente neutronica, risulta nullo, (nessun neutrone viene inviato dall'ambiente circostante):

$$-\frac{\mathbf{F}_0}{4} - \frac{1}{6\mathbf{S}_s} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 = 0, \text{ da cui: } \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 = -\frac{3}{2} \mathbf{S}_s \mathbf{F}_0.$$

Pertanto il flusso all'esterno, supposto decrescente linearmente con la distanza con pendenza pari a quella presente sulla superficie:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \mathbf{z} = \mathbf{F}_0 - \left(\frac{3}{2} \mathbf{S}_s \mathbf{F}_0 \right) \mathbf{z} = \mathbf{F}_0 \left[1 - \left(\frac{3}{2} \mathbf{S}_s \right) \mathbf{z} \right], \text{ si annulla alla}$$

distanza: $\frac{2}{3\mathbf{S}_s} = \frac{2}{3} \mathbf{l}_{ms}$, dal confine, indipendente dal valore del flusso,

detta di *estrapolazione lineare asintotica*, di cui va conseguentemente ridotta la dimensione geometrica reale.

L'approssimazione nel calcolo della distanza di estrapolazione lineare asintotica, è in pratica accettabile per le ordinarie apparecchiature, in quanto questa risulta comunque dell'ordine di qualche centimetro e, in prima approssimazione, può anche essere trascurata nel dimensionamento dei reattori.

Pertanto, scelto il tipo di reattore, è possibile calcolare il valore della costante di integrazione con riferimento all'energia e alle caratteristiche strutturali: $\mathbf{B}_m^2 = (\mathbf{k}_{oo} - 1)/\mathbf{M}^2$, (buckling materiali), che verifica la

$$\text{condizione di criticità: } \mathbf{k}_{oo} \frac{e^{-\mathbf{B}^2 \mathbf{t}_{th}}}{1 + \mathbf{B}^2 \mathbf{L}^2} = 1.$$

Definita la geometria del sistema e calcolatone il buckling geometrico, ovvero le condizioni per cui la soluzione matematica abbia significato fisico e le dimensioni del sistema siano compatibili con la stazionarietà del fenomeno, la condizione di compatibilità fra le due condizioni, ($\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_g$), che risulta:

$$\text{parallelepipedo: } \frac{\mathbf{k}_{oo} - 1}{\mathbf{M}^2 \pi^2} = \left(\frac{1}{\mathbf{a}^2} + \frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{1}{\mathbf{c}^2} \right);$$

$$\text{cubo: } \frac{\mathbf{k}_{oo} - 1}{\mathbf{M}^2} = \frac{3\pi^2}{\mathbf{a}^2}, \text{ da cui: } \mathbf{a} = \pi \mathbf{M} \sqrt{\frac{3}{\mathbf{k}_{oo} - 1}};$$

$$\text{sfera: } \frac{\mathbf{k}_{oo} - 1}{\mathbf{M}^2} = \frac{\pi^2}{\mathbf{R}^2}, \text{ da cui: } \mathbf{R} = \frac{\pi \mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{k}_{oo} - 1}};$$

$$\text{cilindro: } \frac{\mathbf{k}_{oo} - 1}{\mathbf{M}^2} = \frac{\pi^2}{\mathbf{H}^2} + \frac{5,784}{\mathbf{R}^2},$$

identifica la congruenza delle condizioni neutroniche, materiali e geometriche nell'ipotesi di stazionarietà, ovvero la soluzione del sistema critico.

Le dimensioni trovate risultano relative alla criticità, ovvero le dimensioni minime alle quali la reazione può autostenersi.

Pertanto se risulta: $B_m < B_g$, essendo il buckling geometrico inversamente proporzionale alle variabili geometriche, le dimensioni del sistema risultano inferiori a quelle necessarie alla criticità e il reattore, non in grado di sostenere una reazione a catena, è detto **subcritico**.

Viceversa per: $B_m > B_g$, le dimensioni sono sovrabbondanti per la criticità e il reattore è detto **supercritico**.

La geometria sferica essendo relativa al minimo rapporto superficie, (proporzionale alle perdite/ volume, (proporzionale alla generazione di neutroni), appare la più favorevole. Infatti a parità di B_m^2 , è la geometria che permette il minimo volume per ottenere la criticità e il massimo rapporto flusso medio/flusso massimo, ovvero la maggiore omogeneità di flusso e quindi di potenza.

In pratica, tuttavia, per esigenze costruttive non risulta la più diffusa.

I valori di e_{th} e L^2 , ovvero di M^2 , sono calcolati per i diversi materiali idonei alla funzione di moderatore, (Tab.II°.1.21.I°).

Tab.II°.1.21.I° – Caratteristiche dei moderatori.

Moderatore	Densità (kg/m ³)	e_{th} (cm ²)	L (cm)	M (cm)
Acqua	1.000	33	2,88	6,43
Acqua pesante	1.100	120	100	101
Berillio	1.840	98	23,6	25,8
Grafite	1.620	350	50,2	53,6

Il materiale presente nel reattore, tuttavia, non contiene solo moderatore, ma anche combustibile e pertanto i valori effettivi che appaiono nel dimensionamento critico del reattore, non sono quelli relativi al solo moderatore, ma risultano una media pesata fra i valori relativi al moderatore e al combustibile e variano, quindi, in funzione della qualità, della composizione e, per sistemi eterogenei, della geometria costitutiva del reattore.

Agli effetti del rallentamento, il combustibile, praticamente privo di potere moderante, si comporta come spazio vuoto.

Pertanto il valore del cammino libero medio che appare nell'espressione dell'età, (che interviene circa i fenomeni di rallentamento), è aumentato

rispetto al cammino libero medio nel solo moderatore della frazione volumetrica, (f_m), occupata dal moderatore: $\frac{l_{ms}}{f_m}$.

Il valore reale dell'età, e_{th} risulta quindi:

$$e_{th} = \frac{l_{ms}^2}{f_m^2 3z} \ln \frac{E_0}{E_{th}} = \frac{(e_{th})_m}{f_m^2},$$

con $(e_{th})_m$, valore relativo al solo moderatore.

Nell'espressione dell'area di diffusione, (L^2), il coefficiente: $D = l_{ms}/3$, date le modeste concentrazioni di combustibile rispetto al moderatore, risulta praticamente coincidente con quello relativo al solo moderatore, mentre nell'espressione del cammino libero medio di assorbimento, tenendo conto del contributo del combustibile, ovvero della sua sezione di cattura, indicando con i pedici m e u le grandezze relative al moderatore e al combustibile rispettivamente, si ha:

$$L^2 = \frac{1}{3} l_{ms} l_{mc} = \frac{l_{ms}}{3(S_{cm} + S_{cu})} = \frac{l_{ms}}{3S_{cm}} \frac{1}{1 + \frac{S_{cu}}{S_{cm}}}.$$

E poichè essendo il fattore di utilizzazione termica: $f = \frac{S_{cu}}{S_{cu} + S_{cm}}$, si

ottiene: $\frac{S_{cu}}{S_{cm}} = \frac{f}{1-f}$, da cui: $L^2 = \frac{l_{ms}}{3S_{cm}} (1-f) = L_m^2 (1-f)$, con L_m^2 , valore relativo al solo moderatore.

L'espressione di L^2 , (che interviene circa i fenomeni di diffusione), risulta corrispondente a un modello di collisione neutronica isotropa.

Nella teoria più rigorosa, (trasporto), risulta: $L^2 = \frac{1}{3} \frac{l_{ms}}{(1 - \cos q)} l_{mc}$, con: $\cos q$, angolo medio di collisione, (nullo per collisione isotropa).

Per nuclei di moderatore molto leggeri, (idrogeno e deuterio), la teoria a un solo gruppo energetico, (termico), di neutroni, (Teoria della Diffusione), diviene piuttosto approssimata.

Per i reattori a uranio naturale a grafite, (per i quali fu in realtà sviluppata), si ha:

$$L^2 = 0,025 \text{ m}^2; (e_{th}) = 0,0385 \text{ m}^2; M^2 = 0,0635 \text{ m}^2;$$

$B^2 = (1,0625 - 1) / 0,0635 = 0,98 \text{ m}^{-2}$, da cui il lato del reattore, (a), supposto cubico, pari a: $a = 3^{1/2} (\pi/B) \sim 5,5 \text{ m}$ e una corrispondente massa critica di circa **50.000 kg**.

In ogni caso una reazione a catena può autosostenersi solo in reattori di dimensioni superiori a un certo limite, ovvero al di sopra di una certa quantità di combustibile, (massa critica), con preclusione di qualunque applicazione in scala ridotta.

§ II°.1.22 – FATTORE DI UTILIZZAZIONE. TASSO DI IRRAGGIAMENTO.

A differenza dei combustibili chimici, i combustibili nucleari non possono essere sfruttati integralmente sia per limitazioni contingenti di tipo tecnico, che per infattibilità neutronica.

Gli elementi di combustibile all'interno del reattore infatti, presentano una vita tecnica limitata dalla stabilità, resistenza e composizione degli elementi stessi che ne rendono tassativa la sostituzione prima del completo utilizzo di tutti i nuclei fissili presenti.

Inoltre la completa combustione del fissile è preclusa in quanto l'esaurirsi del combustibile durante il funzionamento comporta una riduzione della fertilità del combustibile e quindi del k_{00} del sistema e conseguentemente della reattività, fino alla sottocriticità.

Per la valutazione della frazione massima di combustibile utilizzabile, o del tempo massimo di permanenza del combustibile nel reattore, indicando con $N_5(t)$, $N_8(t)$ e $N_9(t)$, le densità di uranio 235, uranio 238 e plutonio 239 generato per cattura neutronica dall'uranio 238, oltre che eventualmente presente nella carica iniziale, in caso di reattori **veloci**, (s_{f5} , s_{f8} , $s_{f9} \neq 0$), la fertilità del combustibile vale:

$$h(t) = \frac{N_5(t)s_{f5}h_{05} + N_8(t)s_{f8}h_{08} + N_9(t)s_{f9}h_{09}}{N_5(t)(s_{f5} + s_{c5}) + N_8(t)(s_{f8} + s_{c8}) + N_9(t)(s_{f9} + s_{c9})},$$

risultando influente la collisione anelastica per la presenza di materiale fissile, mentre in caso di reattori **termici**, ($s_{f8} = 0$):

$$h(t) = \frac{N_5(t)s_{f5}h_{05} + N_9(t)s_{f9}h_{09}}{N_5(t)(s_{f5} + s_{c5}) + N_8(t)s_{c8} + N_9(t)(s_{f9} + s_{c9})},$$

con valore minimo relativo alle condizioni di criticità del reattore:

$$k_{eff} = e p f h p_r p_d = 1, \text{ ovvero: } h_{min} = 1/(e p f p_r p_d).$$

Note le funzioni: $N_5(t)$, $N_8(t)$ e $N_9(t)$, risulta possibile valutare la funzione: $h = h(t)$ e quindi il tempo massimo di permanenza del combustibile nel reattore come radice della relazione: $h(t) = h_{min}$.

In caso di reattori autofertilizzanti non avendosi diminuzioni di reattività durante il funzionamento del reattore la vita degli elementi di combustibile è in pratica limitata solo da restrizioni tecnologiche e anche al termine della sua vita il combustibile presenta un tenore di fissile pari o anche maggiore di quello iniziale.

In caso di fissile non rigenerabile, (come uranio 235), si definisce fattore di utilizzazione del combustibile, la frazione contenuta inizialmente nel combustibile, effettivamente bruciata:

$$u = \frac{\text{fissile iniziale} - \text{fissile finale}}{\text{fissile iniziale}}.$$

In caso di fissile rigenerabile, (come plutonio 239), il parametro perde significato in quanto nel computo la concentrazione di fissile non dipende solo dal consumo, ma anche dalla generazione per conversione di fertile, (come uranio 238), e potendo quindi il suo tenore finale risultare addirittura superiore a quello iniziale fino a rendere negativo il fattore di utilizzazione.

La trattazione si estende evidentemente anche al caso di una diversa natura del fissile, (uranio 233), del fertile, (torio 232), o della contemporanea presenza di entrambi.

Per ogni nucleo di combustibile, (N_x), in caso di flusso neutronico monoenergetico il tasso di reazione, ($m^{-3} s^{-1}$), risulta: $F (m^{-2} s^{-1}) \times N_x$, (m^{-3}) $\times s (m^2)$, mentre in presenza di un flusso neutronico variabile in un intervallo DE di energia, il tasso globale di reazione risulta: $N_x \int_{DE} F(E)s(E)dE$, con $F(E)$, flusso neutronico, per unità di energia, ($m^{-2} s^{-1} J^{-1}$), e sezioni d'urto variabili con l'energia.

In ogni caso l'espressione può assumere la medesima forma considerando, in caso di energia variabile, valori medi pesati delle grandezze, definiti dalla relazione: $\frac{1}{DE} \int_{DE} F(E)s(E)dE = \underline{F} \underline{s}$.

Pertanto per flusso neutronico **monoenergetico**, (o considerando valori medi pesati), in caso di **assenza** di fonti di **produzione**, il bilancio temporale di concentrazione di combustibile, (nell'ipotesi che le piccole variazioni di concentrazione dei nuclei fissili e fertili non alteri sensibilmente il flusso neutronico), risulta:

$$dN_x(t)/dt = - F(s_{fx} + s_{cx})N_x(t).$$

Considerato anche il contributo del decadimento radioattivo:

$dN_x(t)/dt = - c_{dx}N_x(t)$, con c_{dx} costante di decadimento del nucleo,

(tutti i nuclei di combustibile risultano radioattivi), si ottiene:

$$dN_x(t)/dt = -[F(s_{fx} + s_{cx}) + c_{dx}]N_x(t),$$

con maggiorazione in ogni relazione, del termine: $F(s_{fx} + s_{cx})$, del contributo: c_{dx} , ovvero: $F(s_{fx} + s_{cx}) + c_{dx}$.

Qualora invece, la specie nucleare sia rigenerabile, ovvero possa essere prodotta per conversione, (cattura neutronica e successivi decadimenti), di un'altra specie nucleare presente, $[N_y(t)]$, si ha:

$$dN_x(t)/dt = -[F(s_{fx} + s_{cx}) + c_{dx}] N_x(t) + F s_{cy} N_y(t).$$

Essendo: $\frac{dN_y(t)}{dt} = -[F(s_{fy} + s_{cy}) - c_{dy}] N_y(t)$, si ottiene:

$$\frac{dN_x(t)}{dt} = -[F(s_{fx} + s_{cx}) + c_{dx}] N_x(t) - \frac{F s_{cy}}{[F(s_{fy} + s_{cy}) + c_{dy}]} \frac{dN_y(t)}{dt},$$

ovvero con densità di nuclei della specie x aumentata del termine:

– $dN_y(t)/dt$, [positivo essendo la derivata di $N_y(t)$, negativa], tenuto conto del rapporto fra la sezione d'urto di conversione dalla specie y alla x , (s_{cy}), e quella totale di distruzione della specie y :

$$F(s_{fy} + s_{cy}) + c_{dy}.$$

In realtà, tuttavia, per tipici valori dei parametri nel reattore, ($F \sim 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$; $s \sim 10^{-27} \text{ m}^{-2}$, ovvero: $Fs \sim 10^{-9} \text{ s}^{-1}$), e delle costanti di decadimento dei nuclei di combustibile: U235, ($3,123 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1}$), U233, ($1,38 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-1}$), U238, ($4,92 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$), Pu239, ($9 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-1}$), il contributo relativo risulta trascurabile, ($5 \cdot 10^{-7} \div 10^{-3}$)

Pertanto in caso di reattori **veloci**, (flusso praticamente monoenergetico), a uranio 235 e plutonio 239 fissili e uranio 238 fertile, le relazioni risultano:

$$N_5(t) = N_{05} e^{-F(s_{f5} + s_{c5})t}; \quad N_8(t) = N_{08} e^{-F(s_{f8} + s_{c8})t},$$

con: N_{05} , N_{08} , concentrazioni iniziali dei nuclei di uranio 235 e 238.

Nel bilancio del plutonio il contributo alla generazione per cattura e decadimento dell'uranio 238, tenuto conto della fissione veloce, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{F s_{c8}}{F(s_{f8} + s_{c8})} \frac{dN_8(t)}{dt}, \text{ da cui:} \\ \frac{dN_9(t)}{dt} = -F(s_{f9} + s_{c9})N_9(t) - \frac{F s_{c8}}{F(s_{f8} + s_{c8})} \frac{dN_8(t)}{dt} = \\ = -F(s_{f9} + s_{c9})N_9(t) + F s_{c8} N_{08} e^{-F(s_{f8} + s_{c8})t}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$N_9(t) = \frac{N_{08}s_{c8}}{(s_{f9} + s_{c9}) - (s_{f8} + s_{c8})} e^{-F(s_{f8}+s_{c8})t} + \left[N_{09} - \frac{N_{08}s_{c8}}{(s_{f9} + s_{c9}) - (s_{f8} + s_{c8})} \right] e^{-F(s_{f9}+s_{c9})t},$$

qualora la carica di fissile iniziale, (N_{09}), sia una miscela di uranio e plutonio, ($N_{09} \neq 0$), ovvero:

$$N_9(t) = \frac{N_{08}s_{c8} \left\{ e^{-F(s_{f8}+s_{c8})t} - e^{-F(s_{f9}+s_{c9})t} \right\}}{(s_{f9} + s_{c9}) - (s_{f8} + s_{c8})},$$

in caso di carica iniziale nulla di plutonio, ($N_{09} = 0$).

In caso di reattori **termici**, il flusso neutronico risulta variabile fra l'energia di fissione, (E_0), e quella termica, (E_{th}).

Tuttavia tenuto conto del valore molto maggiore del tempo di diffusione rispetto a quello di rallentamento e alle maggiori sezioni d'urto in zona termica per tutte le reazioni, per l'uranio 235 l'assorbimento neutronico durante il rallentamento risulta trascurabile, ovvero l'integrale di assorbimento limitato alla sola energia **termica**.

Il bilancio di densità risulta, quindi:

$$\frac{dN_5(t)}{dt} = -F(s_{f5} + s_{c5})N_5(t),$$

da cui: $N_5(t) = N_{05}e^{-F(s_{f5}+s_{c5})t}$, (con eventuale maggiorazione delle sezioni d'urto per i contributi di fissione e cattura veloce).

Anche per l'uranio 238 risultano preponderanti gli assorbimenti alle energie termiche, ovvero trascurabile l'assorbimento durante il rallentamento a meno delle catture nell'intervallo di risonanza.

Anche in tal caso quindi, l'integrale per la valutazione della distruzione di nuclei e quindi variazione di concentrazione per cattura, si riduce, (oltre al decadimento radioattivo), al solo contributo del flusso monoenergetico **termico**: $-FN_8(t)s_{c8}$, ($s_{f8} = 0$, $s_{c8} \sim s_{t8}$), mentre l'assorbimento alle risonanze durante il rallentamento, risulta pari alla frazione: **(1 - p)** della densità di rallentamento all'energia di fissione:

$(k_{00}/p)S_c F$, all'età media di risonanza, ($e_r \sim e_{th}$): $(k_{00}/p)S_c F e^{-B^2 e_{th}}$, (S_c sezione macroscopica di cattura totale di combustibile e moderatore), rapportata alla concentrazione di uranio 238, $[N_8(t)/N_{08}]$,

e quindi: $[k_{00}FS_c(1 - p)/p e^{-B^2 e_{th}}]N_8(t)/N_{08}$.

Si ottiene pertanto:

$$\begin{aligned}\frac{dN_8(t)}{dt} &= -FN_8(t)s_{c8} - k_{oo}S_c F(1-p)/p e^{-B^2 e_{th}} [N_8(t)/N_{o8}] = \\ &= - \left[F s_{c8} + k_{oo} S_c (1-p)/p e^{-B^2 e_{th}} \right] N_8(t)/N_{o8}, \\ &\quad -F \left(s_{c8} + \frac{k_{oo} S_c (1-p)}{N_{o8} p} e^{-B^2 e_{th}} \right) t\end{aligned}$$

da cui: $N_8(t) = N_{o8} e^{-F s_{c8}^* t}$.

Gli assorbimenti alle risonanze comportano quindi, un aumento della

sezione di cattura del termine: $\frac{k_{oo} S_c (1-p)}{N_{o8} p} e^{-B^2 e_{th}}$, per cui il modello

può essere descritto in forma compatta introducendo una sezione di cattura efficace, (s_{c8}^*), pari a:

$$s_{c8}^* = s_{c8} + \frac{k_{oo} S_c (1-p)}{N_{o8} p} e^{-B^2 e_{th}}, \quad \text{ovvero: } N_8(t) = N_{o8} e^{-F s_{c8}^* t},$$

(eventualmente maggiorata dai contributi di fissione e cattura veloce).

Per il plutonio 239, (N_{o9} , concentrazione iniziale), la diminuzione di concentrazione dell'uranio 238 alle energie termiche e alle risonanze, va considerata come fonte di conversione, (a meno del contributo di decadimento), essendo nulla la sezione d'urto di fissione.

Trascurando l'assorbimento neutronico del plutonio durante il rallentamento, l'integrale si riduce al contributo all'energia termica, (con eventuale maggiorazione delle relative sezioni d'urto per i contributi di fissione e cattura veloce), e si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{dN_9(t)}{dt} &= -F(s_{f9} + s_{c9})N_9(t) - \frac{dN_8(t)}{dt} = \\ &= -F(s_{f9} + s_{c9})N_9(t) + F s_{c8}^* N_{o8} e^{-F s_{c8}^* t},\end{aligned}$$

da cui:

$$N_9(t) = \frac{N_{o8} s_{c8}^*}{(s_{f9} + s_{c9}) - s_{c8}^*} \left\{ e^{-F s_{c8}^* t} - e^{-F(s_{f9} + s_{c9})t} \right\},$$

($N_{o9} = 0$);

$$N_9(t) = \frac{N_{o8} s_{c8}^*}{(s_{f9} + s_{c9}) - s_{c8}^*} e^{-F s_{c8}^* t} + \left[N_{o9} - \frac{N_{o8} s_{c8}^*}{(s_{f9} + s_{c9}) - s_{c8}^*} \right] e^{-F(s_{f9} + s_{c9})t}$$

($N_{o9} \neq 0$).

Determinate le funzioni: $N_5(t)$, $N_8(t)$ e $N_9(t)$, da cui il limite temporale di permanenza del combustibile nel reattore, (t_{lim}), imposto, (a meno di considerazioni tecniche), da considerazioni neutroniche, il massimo valore del fattore di utilizzazione, (u_{max}), risulta quindi:

$$u_{\max} = \frac{N_{o5} - N_{o5} e^{-F(s_{f5} + s_{c5})t_{\lim}}}{N_{o5}} = 1 - e^{-F(s_{f5} + s_{c5})t_{\lim}}.$$

Si intende con tasso di irraggiamento teorico, (equivalente al potere calorifico dei combustibili chimici), IR_0 , l'energia specifica liberata dalla fissione di tutto il fissile presente nella carica iniziale, (senza considerare l'eventuale conversione del fertile), che espresso tipicamente in **MWD/t**, (**1 MWD/t = 8,64 10⁷ J/kg**), vale:

$$IR_0 = (8,16 \cdot 10^{13} / 8,64 \cdot 10^7) a = 9,44 \cdot 10^5 a \text{ MWD/t},$$

con **a** frazione di arricchimento.

Per uranio naturale, (**a = 7,12 10⁻³**), si ha, quindi: **IR₀ = 6700 MWD/t**.

Il tasso di irraggiamento, o resa, reale, (**IR**), è, invece, l'energia praticamente ottenibile dall'unità di massa di un dato combustibile impiegato in un dato tipo di reattore, dipendente quindi, anche dal fattore di utilizzo del fissile e dal contributo della conversione del fertile. Il rapporto **IR/IR₀**, differisce quindi dal fattore di utilizzazione in quanto l'energia generata, comprendendo anche quella derivata dall'utilizzo dell'uranio 238 tramite conversione in plutonio 239, (o in generale dalla conversione di un qualunque fertile in fissile successivamente bruciato), non è semplicemente pari alla frazione dell'energia generabile dalla fissione di tutti i nuclei fissili iniziali.

Per reattori termici la fertilità del combustibile dal valore nullo in presenza di solo fertile, tende al valore massimo in presenza di solo

$$\text{fissile: } h = h_0 \frac{s_{f5}}{s_{f5} + s_{c5}}.$$

Pertanto all'aumentare dell'arricchimento, aumentando la fertilità aumenta il **k₀₀**, e quindi il **B_m²** con conseguente diminuzione delle dimensioni critiche.

Indicativamente le dimensioni critiche, (lato cubo equivalente), per reattori a uranio naturale, vanno da **7 m** per i reattori a gas grafite, a **3 m** per i reattori ad acqua pesante, mentre impiegando combustibile lievemente arricchito scendono a **1,5 m** per i reattori ad acqua leggera e a **0,3 m** per i reattori veloci a combustibile fortemente arricchito.

Allo scopo di diminuire le dimensioni critiche, il nocciolo del reattore viene circondato da un mantello di riflettore, (blanket), composto da un materiale diffondente e poco assorbente, (tipo moderatore), che rifletta verso il reattore parte dei neutroni fuoriusciti.

Con tale disposizione le dimensioni critiche possono ridursi fino al **50%** di quelle relative al reattore nudo.

Inoltre, poichè risulta aumentato il flusso neutronico in vicinanza della periferia del reattore, si ha un migliore impiego delle regioni esterne del nocciolo con aumento della potenza media a parità di potenza massima e quindi di sollecitazioni massime ammissibili.

"Il navigatore italiano ha preso terra nel Nuovo Mondo": è la frase in codice che Arthur Compton, (premio Nobel), telegrafò ad Harvard per annunciare che alle 15.36 del 2 dicembre 1942 sotto la tribuna dello Stagg Field all'Università di Chicago, Enrico Fermi, a tre anni dalla scoperta della fissione, aveva ottenuto la prima reazione nucleare a catena controllata e autosostenentesi. Era l'inizio dell'era atomica.

Il reattore, (o "pila" atomica, come venne chiamata al tempo), era un cilindro di blocchi di grafite, (45.000), che racchiudevano circa 60.000 kg di uranio naturale metallico, munito di barre di controllo di cadmio.

Circa il possibile uso bellico della fissione nucleare, già nel 1939 il presidente Roosevelt aveva ricevuto una lettera in tal senso firmata dai più autorevoli fisici rifugiatisi in America, (fra cui Einstein).

La massa critica di fissile puro necessaria per la realizzazione di una bomba nucleare a fissione può essere ottenuta per separazione isotopica dell'uranio 235 dall'uranio naturale tramite procedimenti, (lunghi e costosi), come la diffusione gassosa o l'ultracentrifugazione, ovvero tramite la trasmutazione dell'uranio 238 in plutonio 239, (che non a caso porta il nome del dio dell'inferno), con bombardamento neutronico, ottenuta per la prima volta nel 1941 dal Glenn Seaborg ed Emilio Segrè col ciclotrone di Berkeley, ma solo nel giugno del 1942 Washington autorizzò il Progetto Manhattan, affidato a Fermi, per la produzione di plutonio con una pila atomica.

A sei anni dalla scoperta della fissione, il 16 luglio 1945 ad Alamogordo, (Nuovo Messico), avvenne la prima esplosione nucleare sperimentale, (19 kton), e il 6 e 9 agosto, a scopo distruttivo sulle città giapponesi di Hiroshima, (18 kton), e Nagasaki.

In seguito Fermi si dedicò allo studio della bomba nucleare a fusione insieme a Edward Teller che nel 1952 riuscì infine a realizzarla.

§ II°.1.23 – BOMBE NUCLEARI A FISSIONE.

Una bomba consiste in un dispositivo in cui viene innescata una reazione esoergica in tempi sufficientemente ridotti, (esplosione), da indurre fenomeni d'urto di sufficiente effetto distruttivo.

L'unità impiegata per la misura dell'energia liberata dalle esplosioni nucleari è la tonnellata, (**t**), di esplosivo chimico convenzionale, (tritololo o TNT), e multipli, (**kt** = 10^3 t, **Mt** = 10^6 t), la cui energia esplosiva

specifica risulta: $10^9 \text{ kcal/t} = 4,18 \cdot 10^{12} \text{ J/t}$, (la liberazione di energia per un esplosivo chimico è circa due ordini di grandezza superiore a un combustibile, ovvero: $10^2 \times 10^4 \text{ kcal/kg} = 10^6 \text{ kcal/kg}$). Nel caso di reazioni chimiche i reagenti fanno parte della carica esplosiva, oppure il comburente è l'ossigeno contenuto nell'aria e comunque eventuali dilatazioni e variazioni geometriche dell'ordigno non interrompono o influenzano la reazione stessa.

Per il rilascio esplosivo dell'energia di un combustibile nucleare tramite reazioni a catena di fissione invece, è necessario che l'innesco di condizioni di criticità del combustibile inerte, (ovvero da condizioni non critiche), e la reazione a catena, avvenga in un tempo inferiore all'inerzia del sistema a dilatarsi per riscaldamento, (fino alla fusione dei materiali), con perdita della geometria critica, (la perdita di geometria comporta necessariamente un aumento del rapporto superficie/volume del sistema), e conseguente spegnimento della reazione.

I ridotti tempi di reazione richiedono quindi una reazione a catena di neutroni di fissione, (veloci), senza ritardi di moderazione.

Per il sostentamento di una reazione a catena con neutroni veloci, è richiesto un arricchimento in fissile, (uranio 235, plutonio), non inferiore al 20%, che risulta quindi, il limite inferiore per la costruzione di armi nucleari.

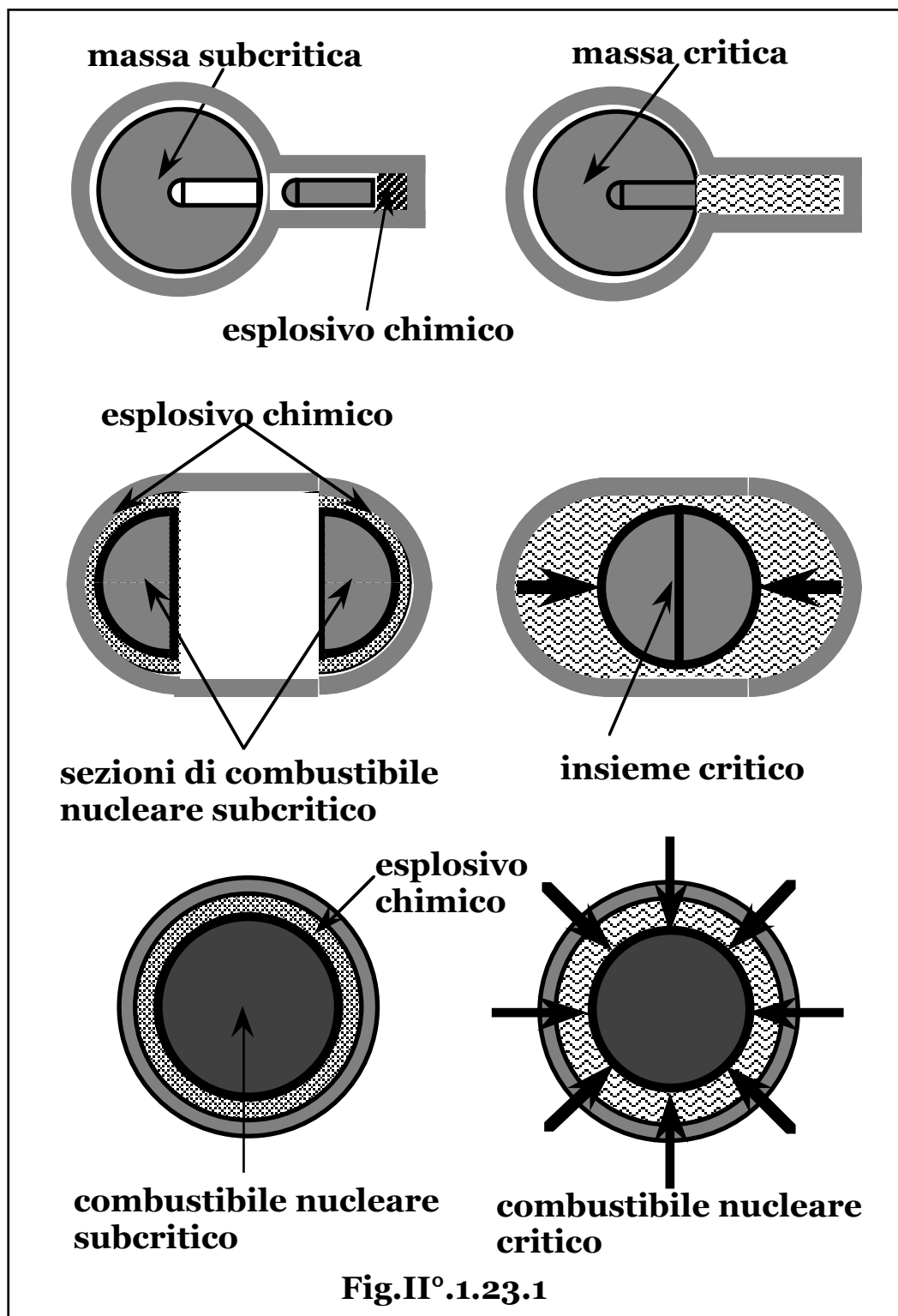
A tali livelli tuttavia, le armi risultano inefficienti in quanto la diminuzione di fertilità dovuta alla rilevante presenza di fertile, allunga i tempi reazione a catena, determinanti nel fornire potenza esplosiva all'arma e aumenta la massa critica necessaria.

In pratica quindi, il combustibile presente nelle armi nucleari, contiene oltre l'85% di fissile, (uranio 235, plutonio).

L'innesco di condizioni di criticità viene ottenuto tramite una preventiva deflagrazione di esplosivo chimico tradizionale con conseguente variazione di geometria e/o di densità del combustibile nucleare che da subcritico si porta alle richieste condizioni di criticità.

La variazione di geometria può essere ottenuta, (**Fig. II°.1.23.1**), con una massa subcritica di combustibile contenente una cavità in cui un'esplosione chimica innesta un proiettile, dello stesso materiale combustibile, che porta l'insieme alla criticità, ovvero con combustibile separato in due unità subcritiche che l'esplosione di materiale chimico porta a contatto realizzando un insieme critico.

L'aumento di densità del combustibile subcritico fino a condizioni di criticità, può essere ottenuto con un'esplosione chimica che comprime la massa riducendone le dimensioni.



Per l'innescio della reazione a catena del materiale critico è necessaria la presenza di emettitori di neutroni come il berillio che in presenza di bombardamento con protoni o raggi alfa da parte di materiali radioattivi come il Polonio 210, ne emette una grande quantità. Il dimensionamento della bomba risulta la determinazione della massa critica di un combustibile fissile per neutroni veloci.

In tal caso si ha: $e = 1$ (fissione veloce);

$p = 1$ (assenza di moderazione);

$f = 1$ (assenza di moderatore), da cui: $k_{00} = h$.

Non avendosi moderazione risulta inoltre: $e_f = 0$, ovvero: $p_r = 1$, e

quindi: $M^2 = L^2$. Impiegando U 235 puro, risulta:

$$B^2 = (k_{00} - 1)/L^2 = 3 (k_{00} - 1) S_c S_s = 3 (k_{00} - 1) N_5^2 s_c s_s,$$

con: $k_{00} = h = 2,1$; $N_5 = d_{s5} N_A/235 = 4,85 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$;

$$s_c \approx s_f = 2,1 \text{ b}; s_s = 4 \text{ b}.$$

Si ottiene quindi: $B = 25,5 \text{ m}^{-1}$, da cui in geometria sferica e in condizioni di criticità: $R_0 = \pi/B = 0,123 \text{ m}$.

Nel caso di una bomba, le ridotte dimensioni richiedono la considerazione della distanza di estrapolazione, per cui indicando con R il reale raggio geometrico, si ha:

$$R = R_0 - \frac{2}{3} l_{ms} = R_0 - \frac{2}{3} \frac{1}{S_s} = R_0 - \frac{2}{3} \frac{1}{N_5 s_{c5}} = 0,088 \text{ m},$$

cui corrisponde una massa critica di U 235, (M_5), pari a:

$$M_5 = d_{s5} (4/3) \pi R^3 \approx 55 \text{ kg}.$$

Sperimentalmente e tenuto conto del riflettore, si ottengono valori di **16 kg** di metallo per l'U 235 e di **4,9 kg** per il Pu 239.

Per una bomba nucleare, impiegata direttamente o come innesco di una bomba a fusione nucleare, (**H**), tutte le cause di aumento della massa rispetto a quella critica, portano a un rapporto lievemente superiore a due, da cui una massa di circa **10 kg/bomba** per il Pu 239 e **32,6 kg/bomba** per l'U 235.

Pertanto essendo l'energia specifica liberata dalla fissione completa di combustibile nucleare pari a: **$8,16 \cdot 10^{13} \text{ J/kg} \sim 20 \text{ t/kg}$** , la potenza minima di una bomba a fissione è dell'ordine delle centinaia di **t**.

Dimensionamento critico dei reattori veloci.

Il dimensionamento proposto per una bomba nucleare a fissione, equivale in pratica a quello di un reattore veloce.

In realtà il dimensionamento critico dei reattori veloci non può essere effettuato con la metodologia riportata in quanto data l'energia e quindi velocità dei neutroni, il ridotto cammino libero medio di collisione non rende applicabile la teoria della diffusione, ma richiede quella del trasporto.

Una relazione approssimata per il calcolo delle dimensioni critiche, (comprensiva della distanza estrapolata, ancora non coincidente con quella valutata per i reattori termici), risulta:

$$\frac{h_0 S_f}{B} \tan^{-1} \left(\frac{B}{S_f + S_a + S_c} \right) \approx 1,$$

che tuttavia fornisce risultati non troppo dissimili da quelli calcolati.

Infatti dallo sviluppo in serie della funzione arcotangente troncato al 3°

ordine: $a \tan x = x - \frac{1}{3} x^3$, si ottiene:

$$\frac{B}{S_f + S_a + S_c} - \frac{1}{3} \left(\frac{B}{S_f + S_a + S_c} \right)^3 \approx \frac{B}{h_0 S_f} = \frac{B}{h(S_f + S_a + S_c)},$$

da cui, dividendo per il fattore: $\frac{B}{S_f + S_a + S_c}$, si ottiene:

$$1 - \frac{1}{3} \left(\frac{B}{S_f + S_a + S_c} \right)^2 = \frac{1}{h}, \text{ da cui: } B \approx (S_f + S_a + S_c) \sqrt{\frac{3(h-1)}{h}},$$

prossima alla relazione: $B = \frac{\sqrt{k_{oo} - 1}}{M} = \frac{\sqrt{k_{oo} - 1}}{L} = \sqrt{3S_s S_c (k_{oo} - 1)}$,

per: $k_{oo} \approx h$; $S_c \approx S_s$; $S_f + S_a \ll S_c$.

§ II°.1.24 – CINETICA DEL REATTORE NUCLEARE.

Il regime variabile.

In regime variabile, ($k_{eff} \neq 1$), nell'ipotesi di un solo gruppo di energia, (ovvero di considerare che i neutroni si rendano disponibili all'energia termica), e nelle medesime ipotesi risolutive relative allo stato stazionario, l'equazione di bilancio per il flusso neutronico, risulta:

$$-D \nabla^2 F(\underline{r}, t) + (k_{oo} e^{-B^2 \tau_{th}} - 1) S_c F(\underline{r}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial F(\underline{r}, t)}{\partial t},$$

$$\text{ovvero: } k_{oo} S_c F(\underline{r}, t) e^{-B^2 \tau_{th}} - (D \nabla^2 + S_c) F(\underline{r}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial F(\underline{r}, t)}{\partial t},$$

$$\text{da cui: } \frac{k_{oo} e^{-B^2 \tau_{th}}}{1 + L^2 B^2} - 1 = \frac{1}{v S_c} \frac{1}{1 + L^2 B^2} \frac{\partial F(\underline{r}, t)}{\partial t}.$$

Durante il processo di rallentamento e diffusione, i neutroni si espandono fino a raggiungere le condizioni di termalizzazione, (rallentamento), o assorbimento, (diffusione).

In un sistema infinito non avendosi fughe, il tempo medio è riferito a

tutti i neutroni, mentre in un sistema finito i neutroni che sfuggono sono i più tardivi, ovvero che si espandono fino a superare i confini dell'elemento considerato.

I tempi medi di rallentamento e diffusione, riferendosi alla frazione di neutroni che giunge alla soglia termica o viene assorbita senza sfuggire, risultano pertanto ridotti rispetto alla media totale.

Per dipendenza lineare dei tempi con la distanza di allontanamento, i valori risultano ridotti della frazione che termina il percorso all'interno dell'elemento, ovvero della probabilità di non sfuggire durante il

rallentamento:
$$p_r = e^{-B^2 e_{th}} \approx \frac{1}{1 + B^2 e_{th}}, (B^2 e_{th} \ll 1),$$

e diffusione:
$$p_d = \frac{1}{1 + B^2 L^2}:$$

$$t_{rall} = \frac{\sqrt{2m}}{zS_s} \left(\frac{1}{\sqrt{E_{th}}} - \frac{1}{\sqrt{E_o}} \right) e^{-B^2 e_{th}} \approx \frac{\sqrt{2m}}{zS_s} \left(\frac{1}{\sqrt{E_{th}}} - \frac{1}{\sqrt{E_o}} \right) \frac{1}{1 + B^2 e_{th}}$$

$$t_{diff} = \frac{1}{vS_c} \frac{1}{1 + L^2 B^2}.$$

Per i neutroni immediati il tempo t_o , relativo al processo di emissione, (t_{em}), rallentamento, (t_{rall}), e diffusione, (t_{diff}), di un neutrone:

$t_o = t_{em} + t_{rall} + t_{diff}$, risulta con sufficiente approssimazione, pari al tempo di diffusione, (t_{diff}), essendo trascurabile il tempo di emissione dei neutroni all'atto della fissione e nettamente inferiore il tempo di rallentamento rispetto a quello di diffusione.

Il prodotto: $\frac{1}{vS_c} \frac{1}{1 + L^2 B^2} = t_{diff} \approx t_o$, risulta quindi la vita del neutrone in un mezzo finito, variabile da $1/vS_c$ per B^2 che tende a zero, (dimensione infinita), a zero per B^2 che tende a infinito, (dimensione nulla).

Si ottiene pertanto: $k_{eff} - 1 = \frac{t_o}{\bar{F}(r, t)} \frac{\partial \bar{F}(r, t)}{\partial t}$, e indicando con:

$k_{ex} = k_{eff} - 1$, il fattore di moltiplicazione in "eccesso":

$$k_{ex} = \frac{t_o}{\bar{F}(r, t)} \frac{\partial \bar{F}(r, t)}{\partial t}.$$

Detto $F_o(r)$, il flusso neutronico in condizioni di regime, il suo andamento temporale, risulta quindi:

$$\bar{F}(\mathbf{r}, t) = F_0(\mathbf{r}) e^{\frac{k_{ex} t}{t_0}} = F_0(\mathbf{r}) e^{\frac{t}{T}}, \text{ avendo indicato con:}$$

$$T = \frac{t_0}{k_{eff} - 1} = \frac{t_0}{k_{ex}}, \text{ il "periodo" del reattore.}$$

Pertanto se risulta:

$k_{eff} > 1$ il periodo del reattore risulta positivo e si ha un aumento esponenziale delle grandezze: il reattore è **supercritico**.

$k_{eff} = 1$ il periodo tende a infinito e si ha quindi: **$n = n_0 = \text{costante}$** , per cui risulta costante il numero di reazioni nell'unità di tempo e la potenza erogata: il reattore è **critico**.

$k_{eff} < 1$ il periodo risulta negativo e la popolazione neutronica, (e quindi il numero di reazioni nell'unità di tempo e la potenza generata), diminuisce esponenzialmente: il reattore è **subcritico**.

Per reattori termici a uranio naturale, risulta: **$t_0 \sim 10^{-3} \text{ s}$** , per cui anche lievi eccessi di reattività renderebbero il controllo del reattore irrealizzabile in pratica.

Nei reattori a combustibile arricchito, si ha: **$t_0 \sim 10^{-4} \text{ s}$** , e nei reattori veloci: **$t_0 \sim 10^{-7} \text{ s}$** , per cui la reazione risulterebbe ancora più incontrollabile.

Effetto dei neutroni ritardati.

I neutroni globalmente emessi, per ogni evento di fissione, si distinguono in immediati e ritardati.

I neutroni immediati, (oltre il 99% del totale), con energie comprese fra 1 e 10 MeV, vengono liberati in un tempo, (**$\sim 10^{-14} \text{ s}$**), trascurabile rispetto ai successivi processi, per cui il tempo di emissione può ritenersi nullo.

I neutroni ritardati, con energie comprese fra 0,25 e 0,67 MeV, vengono, invece, emessi successivamente da alcuni prodotti di fissione, detti precursori, (si conoscono sei nuclei precursori di cui due identificati, **$^{137}_{53}\text{I}$** , **$^{87}_{35}\text{Br}$** , che risultano gli stessi per tutti i combustibili, **Tab. II°.1.24.I**).

Il tempo di ritardo dipende dalla costante di decadimento dei singoli precursori che risultano comprese fra **1,61 e $0,0125 \text{ s}^{-1}$** , (vite medie fra **0,62 e 80 s**).

Tab.II°.1.24.I° – Numero e frazione di neutroni ritardati nella fissione.

Nuclide	n° neutroni ritardati per fissione	Frazione di neutroni ritardati per fissione	Vita media (s)
U 233	0,0070	b = 0,0024	16,63
U 235	0,0166	b = 0,0073	12,66
Pu 239	0,0064	b = 0,0036	13,69
Th 232	0,0527	b = 0,022	
U 238	0,046	b = 0,0157	

I diversi precursori di neutroni ritardati possono essere conglobati in un unico precursore con frazione di neutroni emessi, (**b**), sul totale di neutroni per fissione, pari alla somma delle frazioni relative ai diversi

precursori, (**b_i**): $b = \sum_{i=1}^m b_i$, (**m** numero di precursori di neutroni ritardati), e costante di decadimento, (**c_d**), ottenibile come media delle costanti di decadimento, (**c_{d*i*}**), dei precursori effettivi di neutroni ritardati, pesata in funzione delle frazioni di neutroni emessi, (**b_i**):

$$\frac{1}{c_d} = t_m = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}}}{\sum_{i=1}^m b_i} = \frac{\sum_{i=1}^m b_i t_{mi}}{\sum_{i=1}^m b_i},$$

ovvero: $\frac{b}{c_d} = b t_m = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}} = \sum_{i=1}^m b_i t_{mi},$

da cui il tempo medio di emissione:

$$t_0 \sim (1 - b) t_{diff} + b t_m = (1 - b) t_{diff} + b/c_d \sim b/c_d = b t_m.$$

A seconda del moderatore presente, il tempo **t₀**, (s), risulta, (*):

	Acqua	Acqua pesante	Grafite
U 233	0,0401	0,1896	0,0519
U 235	0,0926	0,2413	0,1043
Pu 239	0,0495	0,1987	0,0612

e la reazione risulta controllabile.

(*) A rigore il tempo di diffusione andrebbe ridotto del termine:

$1/(1 + B^2 L^2)$, comunque non inferiore a 0,95.

Nell'equazione generale di bilancio il termine di sorgente dei neutroni termici immediati, risulta: $(1 - b) S_c F(r, t) k_{oo} e^{-B^2 \tau_{th}}$, mentre indicando con: B_i e c_{di} la concentrazione e la costante di decadimento dell'*i*esimo precursore di neutroni ritardati, (frazione b_i sul totale di neutroni per fissione), il termine di sorgente di neutroni veloci relativo ai

neutroni ritardati, vale: $\sum_{i=1}^m c_{di} B_i$, (m numero di precursori di neutroni ritardati), e quindi la sorgente di neutroni termici relativo ai neutroni ritardati: $p e^{-B^2 \tau_{th}} \sum_{i=1}^m c_{di} B_i$, da cui l'equazione di bilancio:

$$[k_{eff}(1 - b) - 1]F(r, t) + \frac{p}{S_c} \frac{e^{-B^2 \tau_{th}}}{1 + L^2 B^2} \sum_{i=1}^m c_{di} B_i(r, t) = t_o \frac{\partial F(r, t)}{\partial t},$$

ove si è supposto che nonostante l'energia di origine dei neutroni ritardati sia inferiore a quella di fissione, l'età di tutti i neutroni non risulti sensibilmente diversa.

Essendo la generazione globale di neutroni di fissione pari a: $(k_{oo}/p)F(r, t) S_c$, la velocità di formazione dell'*i*esima specie di precursori di neutroni ritardati, vale: $b_i k_{oo}/p F(r, t) S_c$, mentre la velocità di decadimento radioattivo dell'*i*esimo precursore, vale: $- c_{di} B_i$, da cui l'equazione di bilancio:

$$\partial B_i(r, t)/\partial t = b_i(k_{oo}/p)F(r, t)S_c - c_{di}B_i(r, t).$$

Poichè le equazioni sono lineari del primo ordine con variabili spaziali e temporali separabili, è lecito imporre soluzioni esponenziali monomie:

$$F = F_o(r) e^{t/T}; B_i(r, t) = B_{io}(r) e^{t/T}, (T \text{ costante arbitraria}),$$

che introdotte nelle relazioni di bilancio, forniscono:

$$B_{io}(r) = \frac{k_{oo}F_o(r)S_c}{p} \frac{b_i}{\frac{1}{T} + c_{di}};$$

$$k_{eff}(1 - b) - 1 + k_{eff} \sum_{i=1}^m \frac{b_i c_{di}}{\frac{1}{T} + c_{di}} = \frac{t_o}{T},$$

ovvero, ($\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i$): $\mathbf{k}_{\text{eff}} - 1 + \mathbf{k}_{\text{eff}} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\mathbf{b}_i \mathbf{c}_{di}}{\frac{1}{T} + \mathbf{c}_{di}} - \mathbf{b}_i \right) - \frac{t_o}{T} = 0$,

e quindi: $\mathbf{k}_{\text{eff}} - 1 = \mathbf{k}_{\text{eff}} \sum_{i=1}^m \frac{\frac{\mathbf{b}_i}{T}}{\frac{1}{T} + \mathbf{c}_{di}} + \frac{t_o}{T}$.

Si indica con reattività, (\mathbf{r}_t), la grandezza: $\mathbf{r}_t = \frac{\mathbf{k}_{\text{eff}} - 1}{\mathbf{k}_{\text{eff}}} = \frac{\mathbf{k}_{\text{ex}}}{\mathbf{k}_{\text{eff}}}$,

(e inversamente: $\mathbf{k}_{\text{eff}} = 1/(1 - \mathbf{r}_t)$), in funzione della quale l'equazione

diviene: $\mathbf{r}_t = \frac{t_o}{T + t_o} + \frac{T}{T + t_o} \sum_{i=1}^m \frac{\frac{\mathbf{b}_i}{T}}{\frac{1}{T} + \mathbf{c}_{di}}$.

Per ogni valore di reattività, l'equazione caratteristica, di grado ($\mathbf{m} + 1$), ammette ($\mathbf{m} + 1$), soluzioni, (\mathbf{T}_i , con: $i = 1, 2, \dots, \mathbf{m}$), dipendenti dalle proprietà nucleari dei materiali presenti nel reattore, (\mathbf{r}_t , \mathbf{b}_i , \mathbf{c}_{di}), e pertanto la soluzione per il flusso risulta una combinazione lineare di

($\mathbf{m} + 1$) termini esponenziali: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\mathbf{m}+1} \mathbf{F}_{i0}(\mathbf{r}) e^{\frac{t}{\mathbf{T}_i}}$, con $\mathbf{F}_{i0}(\mathbf{r})$, costanti

dipendenti dalle condizioni iniziali del reattore nello stato stazionario precedente al transitorio.

In caso di **reattività positiva**, ($\mathbf{k}_{\text{eff}} > 1$), le radici dell'equazione caratteristica risultano tutte negative, (dette quindi periodi transitori e dello stesso ordine di grandezza dell'inverso delle costanti di decadimento: $\mathbf{T}_i \sim 1/\mathbf{c}_{di}$), tranne una, (\mathbf{T}_r), e pertanto dopo un breve transitorio il flusso risulta: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) e^{t/\mathbf{T}_r}$, con \mathbf{T}_r indicato quindi come "periodo stabile" del reattore.

Per un unico precursore globale di neutroni ritardati, l'equazione

caratteristica diviene: $\mathbf{r}_t = \frac{t_o}{T + t_o} + \frac{T}{T + t_o} \frac{\frac{\mathbf{b}}{T}}{\frac{1}{T} + \mathbf{c}_d}$,

che ammette due soluzioni di cui una positiva e una negativa.

Per piccoli valori di reattività, inferiori al valore del parametro \mathbf{b} , una soluzione approssimata, risulta:

$$F(r, t) \approx F_0(r) \left(\frac{b}{b - r_t} e^{\frac{c_d r_t}{b - r_t} t} - \frac{r_t}{b - r_t} e^{-\frac{b - r_t}{t_0} t} \right),$$

e all'esaurirsi dell'effetto dell'esponenziale negativo:

$$F(r, t) \approx F_0(r) \frac{b}{b - r_t} e^{\frac{c_d r_t}{b - r_t} t},$$

con quindi periodo stabile del reattore ricavabile dalla relazione:

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{F(r, t)} \frac{\partial F(r, t)}{\partial t} = \frac{c_d r_t}{b - r_t}.$$

All'inizio del transitorio, il flusso aumenta più rapidamente, (aumento iniziale rapido), con periodo, (T_0), ottenibile dalla relazione:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{F_0(r)} \left[\frac{\partial F(r, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = \frac{c_d r_t b}{(b - r_t)^2} + \frac{r_t}{t_0},$$

mentre per piccoli valori di reattività: $\frac{1}{T_0} \approx \frac{r_t}{t_0} \approx \frac{k_{ex}}{t_0}$, pari al periodo corrispondente a tutti i neutroni immediati.

Per reattività limitate, ($r_t \ll b$), risulta: $T_r \approx \frac{b}{c_d r_t}$, ovvero periodo stabile del reattore inversamente proporzionale alla reattività.

Il valore della media pesata si ricava osservando che dalla relazione:

$$k_{eff} - 1 = k_{eff} \sum_{i=1}^m \frac{\frac{b_i}{T}}{\frac{1}{T} + c_{di}} + \frac{t_0}{T}, \text{ ovvero: } r_t = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{1 + c_{di} T} + \frac{t_0}{k_{eff} T},$$

per reattività ridotte, ($1 \ll c_{di} T$; $\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di} T} \gg \frac{t_0}{k_{eff} T}$), si ha:

$$r_t \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}}, \text{ da cui: } T_r \approx \frac{1}{r_t} \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}}, \text{ che eguagliata alla relazione:}$$

$$T_r \approx \frac{b}{c_d r_t}, \text{ fornisce il valore della media pesata: } \frac{b}{c_d} = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}},$$

e quindi:
$$c_d = \frac{\sum_{i=1}^m b_i}{\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}}}$$

Per piccole reattività quindi, il periodo stabile del reattore è indipendente dalla vita del neutrone, (t_o), mentre per maggiori valori di reattività risulta proporzionale alla vita stessa.

Nei reattori a combustibile arricchito, e nei reattori veloci, essendo paragonabile la frazione di neutroni ritardati emessi, (b), e praticamente gli stessi i precursori e quindi il tempo medio di emissione, per piccoli valori di reattività la cinetica e il controllo del reattore risultano paragonabili a quelle relative ai reattori a combustibile naturale, mentre per valori superiori di reattività, il periodo stabile risulta inferiore.

Infine per elevati valori di reattività, al diminuire del periodo stabile,

nella relazione: $r_t = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{1 + c_{di}T} + \frac{t_o}{k_{eff}T}$, risulta trascurabile il termine

relativo ai neutroni ritardati, ovvero: $r_t \approx \frac{t_o}{k_{eff}T}$ e quindi il contributo

dei neutroni ritardati diviene trascurabile e il reattore si comporta come se tutti i neutroni fossero immediati:

$$T \approx \frac{t_o}{k_{eff}r_t} = \frac{t_o}{k_{eff} - 1} = \frac{t_o}{k_{ex}}$$

In caso di reattori ad acqua leggera e uranio arricchito, si ha:

$$t_{diff} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ s}; b = \sum_{i=1}^m b_i = 0,0073; \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}} = 0,092 \text{ s e quindi:}$$

$$c_d = \frac{\sum_{i=1}^m b_i}{\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{c_{di}}} = 0,08 \text{ s}^{-1},$$

per cui posto: $k_{eff} = 1,0025$, ($r_t = 0,0025$), si ottiene:

$$T_r = \frac{b - r_t}{c_d r_t} = 24 \text{ s, (posto: } t_o \sim (1 - b) t_{diff} + b/c_d, \text{ si ottiene:}$$

$t_o = 0,0915 \text{ s}$, da cui: $T_r = 36,5 \text{ s}$), mentre in caso di tutti i neutroni immediati:

$$T = \frac{t_0}{k_{\text{eff}} - 1} = 0,084 \text{ s.}$$

In caso di **reattività negativa**, ($k_{\text{eff}} < 1$), tutti gli esponenziali risultano negativi e quindi dopo un breve intervallo di tempo risulta efficace solo il termine a maggior periodo che viene in pratica a coincidere con quello del precursore di neutroni ritardati a maggiore vita media e che risulta quindi, il periodo stabile, (negativo), del reattore.

Per piccoli valori, risulta ancora valida l'approssimazione: $T_r \approx \frac{b}{c_d r_t}$, mentre per reattività elevate, a differenza delle reattività positive, il periodo stabile calcolato in base a un unico precursore globale di neutroni ritardati, risulta inferiore.

La relazione: $r_t = \frac{t_0}{T + t_0} + \frac{T}{T + t_0} \sum_{i=1}^m \frac{\frac{b_i}{T}}{\frac{1}{T} + c_{di}}$, si approssima, infatti,

nella: $r_t \approx \frac{\frac{b}{T}}{\frac{1}{T} + c_{d \min}} = \frac{b}{1 + c_{d \min} T}$, che all'aumentare della

reattività, porta al valore limite: $T \sim -1/c_{d \min} \sim -80 \text{ s.}$

In generale, qualora il fattore di moltiplicazione effettivo relativo ai soli neutroni immediati risulti maggiore dell'unità: $k_{\text{eff}}(1 - b) > 1$ e quindi:

$k_{\text{eff}} > 1/(1 - b)$, ovvero: $r_t = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} = b$, i neutroni ritardati non sono

più essenziali a mantenere la criticità e la reazione a catena può autosostenersi coi soli neutroni immediati, o "pronti": il reattore si dice "**prontocritico**".

La relazione di bilancio, (trascurando il termine imputabile ai neutroni ritardati), diviene: $[k_{\text{eff}}(1 - b) - 1]F(r, t) = t_0 \frac{\partial F(r, t)}{\partial t} = 0$, da cui:

$$F(r, t) = F_0(r)e^{\frac{k_{\text{eff}}(1-b)-1}{t_0}t} = F_0(r)e^{\frac{k_{\text{eff}}(r_t-b)}{t_0}t},$$

ovvero: $T = \frac{t_0}{k_{\text{eff}}(r_t - b)}$, e infine per: $r_t \gg b$, $T = \frac{t_0}{k_{\text{eff}} - 1}$, come se tutti i neutroni fossero immediati.

La condizione di prontocriticità, ($r_t = b$), viene impiegata per definire una unità di reattività, (dollari), pari a: $(r_t)\$ = r_t/b$, ovvero reattore prontocritico per reattività unitaria, (in dollari).

Per il controllo del reattore, il k_{eff} non deve, quindi, superare il valore:

$$k_{eff} = 1/(1 - b): \quad \begin{aligned} k_{eff} &< 1,0074 && (U \ 235); \\ k_{eff} &< 1,0036 && (Pu \ 239); \\ k_{eff} &< 1,0024 && (U \ 233), \end{aligned}$$

ovvero non presentare valori di reattività superiori a 1 \$.

§ II°.1.25 – CONVERSIONE E AUTOFERTILIZZAZIONE.

In qualunque reazione a catena sostenuta da un flusso neutronico, se è presente nel reattore materiale fertile, una parte si tramuta in materiale fissile per cattura neutronica.

Pertanto mentre del materiale fissile brucia, altro fissile viene prodotto e contribuisce successivamente alla combustione nucleare.

In clima di precaria economia neutronica, tali assorbimenti parassiti risultano dannosi e tuttavia, disponendo di forti arricchimenti di partenza, in modo da avere elevati valori del fattore di moltiplicazione, sono possibili sistemi autofertilizzanti, (breeder), ovvero reattori, in grado di produrre materiale fissile convertendo materiale fertile, in quantità pari o superiore a quella bruciata.

Una reazione a catena è sostenibile con neutroni veloci, solo con forti arricchimenti in fissile del combustibile.

Il fattore di fertilità per neutroni veloci, infatti, varia, per miscele isotopiche di U 235 e U 238, da valori lievemente superiori all'unità con uranio naturale, (U 235 al 7,12 %), a $h = 2,1$, con fissile puro, (U 235). Non risulta, quindi, economicamente vantaggioso sfruttare tali reazioni e i combustibili richiesti, quando in zona termica la reazione a catena si sostiene con combustibile poco arricchito o, con opportuna scelta del moderatore, anche con uranio naturale, ($h = 1,32$).

Tuttavia qualora il progetto preveda l'utilizzo anche di materiale fertile tramite conversione in fissile e siano quindi richiesti comunque rilevanti arricchimenti di partenza, i reattori a neutroni veloci non risultano penalizzati e i relativi schemi di impianto appaiono parimenti realizzabili e competitivi rispetto a quelli termici.

Si definisce rapporto di conversione, (C), il valore:

$$C = \frac{\text{nuclei fissili prodotti per cattura neutronica}}{\text{nuclei fissili consumati nella reazione}}.$$

A seconda del tipo di materiale fissile e fertile, il combustibile prodotto può essere il medesimo oppure diverso dal fissile che brucia.

Per ogni nucleo di fissile consumato, vengono generati **h** neutroni, con **h** fertilità della specie fissionabile. Indicando con **F** i neutroni persi per fughe alle pareti e catture parassite da parte di tutti i materiali presenti nel reattore esclusi i materiali fertili, per ogni nucleo di fissile consumato, considerato che in condizioni di criticità al termine di ogni generazione neutronica un neutrone rimane a mantenere la reazione a catena, quelli assorbiti dal materiale fertile, (che con detta cattura si trasforma in fissile), risultano: **h - 1 - F**, pari quindi al rapporto di conversione: **C = h - 1 - F**.

In un reattore a flusso neutronico monoenergetico, il rapporto di conversione risulta pari al rateo di assorbimento neutronico, (e conseguente conversione), di tutti i nuclei fertili diviso il rateo di consumo di tutti i nuclei fissili:

$$C = \frac{N_2 s_{c2} + N_8 s_{c8}}{N_3(s_{f3} + s_{c3}) + N_5(s_{f5} + s_{c5}) + N_9(s_{f9} + s_{c9})},$$

ove a numeratore per ipotetica massima generalità si sono considerati entrambi nuclei fertili, (torio 232 e uranio 238), e a denominatore tutti i nuclei fissili, (uranio 233, uranio 235 e plutonio 239).

Tale espressione risulta quindi sufficientemente corretta per i reattori veloci.

Nei reattori termici invece, il corrispondente termine si riferisce al flusso termico e occorre quindi aggiungervi il contributo dell'assorbimento da parte dei nuclei fertili, del flusso neutronico in fase di rallentamento, particolarmente sensibile in presenza di risonanze.

In presenza di una sola specie fissile e una sola specie fertile, per ogni nucleo fissile distrutto vengono generati **h** neutroni che divengono **eh** in seguito a eventi di fissione veloce e di questi, indicando con **e_r** l'età

media di risonanza: **eh(1 - p)e^{-B²e_r}**, vengono assorbiti alle risonanze del fertile.

In un reattore termico a uranio 235 come fissile e uranio 238 come

fertile, si ottiene quindi: $C = \frac{N_8 s_{c8}}{N_5(s_{f5} + s_{c5})} + eh(1 - p)e^{-B^2 e_r}.$

In caso di tutte le specie fissili e fertili presenti, il rateo di conversione durante il rallentamento risulta:

$$e(N_3 s_{f3} h_3 + N_5 s_{f5} h_5 + N_9 s_{f9} h_9)(1 - p)e^{-B^2 e_r},$$

da cui il valore del rapporto di conversione, (**C**):

$$\frac{N_2 s_{c2} + N_8 s_{c8} + e(N_3 s_{f3} h_3 + N_5 s_{f5} h_5 + N_9 s_{f9} h_9)(1 - p)e^{-B^2 \tau}}{N_3(s_{f3} + s_{c3}) + N_5(s_{f5} + s_{c5}) + N_9(s_{f9} + s_{c9})}$$

Le concentrazioni di tutte le specie fissili e fertili contenute nel reattore risultano variabili e parimenti la probabilità di fuga alle risonanze, (**p**), cresce al diminuire della concentrazione di fertile.

Conseguentemente anche il rapporto di conversione risulta variabile (in genere decrescente), mentre il valore riferito ai valori iniziali di concentrazione è indicato come rapporto "iniziale" di conversione.

Per ogni nucleo fissionabile distrutto, pertanto, si formano a spese del

materiale fertile: $N = \sum_{n=1}^{\infty} C^n$ nuovi nuclei fissili.

Per: $C < 1$, risulta: $N = C/(1 - C)$ e pertanto appare convertibile in fissile una quantità di fertile pari a $C/(1 - C)$, volte la carica iniziale di fissile.

La sommatoria: $N = \sum_{n=1}^{\infty} C^n$, è limitata superiormente al numero di nuclei fertili disponibili per nucleo fissile presente, ovvero indicando con

a la frazione di arricchimento: $N = \sum_{n=1}^{\infty} C^n \leq \frac{1 - a}{a}$, da cui: $C \leq 1 - a$.

Il potere calorifico del combustibile, (o tasso di irraggiamento), risulta aumentato per effetto della conversione di materiale fertile.

Indicando con **u** il coefficiente di utilizzazione relativo alla necessità tecnica e neutronica di sostituire il combustibile prima del completo utilizzo del fissile presente, si ha:

$$IR = \frac{N_A E_o}{A_m} a \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C^n \right) u = \frac{N_A E_o}{A_m} a \left(1 + \frac{C}{1 - C} \right) u = \frac{N_A E_o a u}{A_m (1 - C)},$$

con **A_m** numero di massa atomica del combustibile, (mediato fra la componente fissile e fertile), o molecolare in caso il combustibile sia legato chimicamente ad altri elementi e a seconda che il valore sia riferito alla massa del solo combustibile o al composto,

Per $C > 1 - a$, la sommatoria matematica perde significato fisico, (a meno di non aggiungere nuovo materiale fertile), e si ottiene la completa conversione dei nuclei fertili.

Nel caso particolare in cui si abbia: $C = 1$, il numero di nuclei fissili rimane costante durante tutto il funzionamento del reattore e in teoria sarebbe possibile utilizzare tutto il materiale fertile.

In tal caso comunque il combustibile frusto estratto presenterebbe una carica di fissile pari a quella iniziale.

Infine per $C > 1$, l'elemento di combustibile alla fine tecnica della sua vita, presenta un tenore di fissile superiore a quello di avvio ed è quindi possibile produrre più fissile di quello consumato, alimentando eventualmente altri reattori.

Per $C \geq 1 - a$, ottenendosi comunque la conversione di tutto il fertile presente, si giunge al limite superiore della resa del combustibile:

$$IR_{\max} = (N_A/A_m)E_0 \text{ u.}$$

La conversione è presente in ogni tipo di reattore, mentre circa la sua entità, per: $C < 1$, il reattore si dice convertitore, mentre per $C > 1$, si dice autofertilizzante.

Il fattore di conversione C per i principali tipi di reattori, risulta:

Reattore	Fattore di conversione C	Fattore di aumento nuclei fissili iniziali $C/(1 - C)$
GCR	0,8	4
HWR	0,8	4
LWR	0,5 ÷ 0,6	1 ÷ 1,5
FBR	1,25	1/a

Si definisce guadagno di conversione, (G), il numero di nuclei di fissile guadagnati per ogni nucleo di fissile consumato.

Risulta quindi: $G = C - 1 = h - 2 - F$.

Detti N_c e N_g il numero di nuclei consumati e guadagnati nell'unità di tempo, si ha: $N_g = GN_c$.

Detta P la potenza del reattore, risulta:

$$N_c = \frac{P}{E_0} \frac{s_c + s_f}{s_f}; \quad N_g = G \frac{P}{E_0} \frac{s_c + s_f}{s_f}.$$

Detta M_f la massa di fissile iniziale, (di massa atomica A_c), il tempo di raddoppio, (T_r), della carica di materiale fissile come indice di recupero di investimento, risulta quindi, inversamente proporzionale sia al guadagno che alla densità di potenza: $T_r = \frac{M_f}{N_g A_c} = \frac{E_0}{\frac{P}{M_f} G A_c} \frac{s_f}{s_c + s_f}$.

Affinchè siano possibili cicli autofertilizzanti, (ovvero con guadagno positivo), deve risultare: $G = C - 1 = h - F - 2 \geq 0$, ovvero: $h \geq 2 + F$.

In pratica, pertanto, (**Tab.II°.****1.15.II°**), in zona termica è possibile solo un ciclo autofertilizzante a U233 come fissile e Th 232 come fertile, in quanto plutonio e uranio 235 mostrano una fertilità solo di poco superiore a **2**, mentre in zona veloce il ciclo autofertilizzante è realizzabile con qualunque combustibile, con massima possibilità per il ciclo a Pu 239 come fissile e U 238 come fertile.

Il materiale fertile è presente in natura in quantità oltre due ordini di grandezza rispetto a quello fissile, (140 volte l'uranio 238 e circa 70 volte il torio).

Pertanto ogni ragionevole strategia energetica ne deve prevedere comunque l'utilizzo tramite conversione.

Di conseguenza per bassi valori di **C** il reattore viene comunemente indicato come burner, (bruciatore), a indicarne lo scarso pregio, o il cattivo impiego del fissile consumato.

